RNDr. Jiří Dočkal, CSc.

MATEMATIKA I

Řešené příklady

Uváděné řešené příklady jsou vybrány a řazeny v návaznosti na orientační učební pomůcku Doc.RNDr.Ing. Josef Nedoma, CSc.: MATEMATIKA I. Tato sbírka řešených příkladů je určena jako orientační pomůcka pro samostatnou přípravu ke konzultacím kombinovaného studia FSI VUT v Brně.

BRNO, září 2002 autor

Řazení příkladů:

Seznam použité literatury:

1. Eliaš,J.,Horváth,J.,Kajan,J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky.1.časť (4.vydanie),Bratislava, Alfa,1976

2. Jirásek,F.,Kriegelstein,E,Tichý,Z.: Sbírka řešených příkladů z matematiky. Praha,SNTL-Alfa,1987

3. Mrhačová,H.: Cvičení z lineární algebry, Skriptum, VUT v Brně, ES Brno, 1982

4. Nedoma,J.: Matematika I,Shrnutí a přehled, Orientační metodická pomůcka, rukopis,2002

5. Nedoma,J.: Matematika I. Skriptum FSI VUT v Brně, 2002

6. Skála,J.: Matematika I, řešené úlohy pro cvičení, Skriptum, VŠST v Liberci, 1982

7. Tomica,R.: Cvičení z matematiky pro I.ročník, Skriptum, VUT Brno, SNTL Praha, 1965

8. Vosmanská,G.,Rádl,P.: Cvičení z matematické analýzy, Skriptum,(3.vydání), VŠZ Brno,1994

1. Množiny

1.1.1 Určete všechny podmnožiny množiny **M**=$\{3,-4,5\}$.

Množina **M** má tyto podmnožiny:

Prázdná množina $\varnothing$

Podmnožiny o jednom prvku $\{3\},\{-4\},\{5\}$

Podmnožiny o dvou prvcích $\{3,-4\},\{3,5\},\{-4,5\}$

Podmnožiny o třech prvcích $\{3,-4,5\}=\mathbf{M}$

Množina **M** obsahuje 8 podmnožin včetně prázdné množiny a dané množiny.

1.1.2 Určete průnik $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ množin **A , B** , kde **A** je množina všech prvočísel, **B** množina všech sudých čísel .

A=$\{2,3,5,7,11,...\}$, **B**=$\{2,4,6,8,10,...\}$ $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{2\}$

1.1.3 Jsou dány množiny **A**=$\{1,3,5,7\}$, **B**=$\{4,5,6,7,8\}$, **C**=$\{2,5,6,7,8,9\}$. Určete

a) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$, $\mathbf{B}\cap\mathbf{C}$
b) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C}$
c) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$, $\mathbf{B}\cup\mathbf{C}$
d) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{C}$

Hledané množiny jsou :

a) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{5,7\}$, $\mathbf{B}\cap\mathbf{C}=\{5,6,7,8\}$
b) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C}=\{5,7\}$
c) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\{1,3,4,5,7,8\}$, $\mathbf{B}\cup\mathbf{C}=\{2,4,5,6,7,8,9\}$
d) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{C}=\{1,3,4,5,6,7,8,9\}$

1.2.1 Jsou dány intervaly $\mathbf{A}=(-4,3)$, $\mathbf{B}=\langle -2,2\rangle$, $\mathbf{C}=(1,5\rangle$.

Určete:

a) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ c) $\mathbf{B}\cup\mathbf{C}$ e) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ g) $\mathbf{B}\cap\mathbf{C}$
b) $\mathbf{A}\cup\mathbf{C}$ d) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{C}$ f) $\mathbf{A}\cap\mathbf{C}$ h) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C}$

Hledané množiny jsou :

a) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=(-4,3)$ c) $\mathbf{B}\cup\mathbf{C}=\langle -2,5\rangle$ e) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\langle -2,2\rangle$
b) $\mathbf{A}\cup\mathbf{C}=(-4,5\rangle$ d) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{C}=(-4,5\rangle$ f) $\mathbf{A}\cap\mathbf{C}=(1,3)$
g) $\mathbf{B}\cap\mathbf{C}=(1,2\rangle$ h) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C}=(1,2\rangle$

1.2.2 Jsou dány intervaly $\mathbf{A}=(-\infty,2)$, $\mathbf{B}=\langle 1,3\rangle$, $\mathbf{C}=\langle -1,1\rangle \cup \langle 2,\infty)$.

Určete:

a) $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}$
b) $(\mathbf{C}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{A}$
c) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C}$
d) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{C}$

Výsledné intervaly jsou:

a) $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}=\langle -1,1\rangle\cup\langle 2,3\rangle$
b) $(\mathbf{C}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{A}=\langle -1,2)$
c) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\cap\mathbf{C}=\{1\}$
d) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}\cup\mathbf{C}=(-\infty,\infty)$

2. Matematická logika

2.1.1 Rozhodněte, které z následujících slovních spojení je výrok . Pokud se jedná o výrok, určete jeho pravdivost:

a) Číslo x je nezáporné.
b) Číslo 5 je záporné.
c) Každý obdélník je rovnoběžník.
d) Trojúhelník ABC je pravoúhlý.
e) 3:0 je 0

Řešení :

a) není výrok, protože o x nic nevíme
b) je výrok a to nepravdivý
c) je výrok a to pravdivý
d) není výrok, protože o trojúhelníku ABC nic nevíme
e) není výrok, protože dělení nulou není definováno

2.1.2 Utvořte negaci výroků:

a) dnes je svátek
b) všichni žijící lidé jsou menší než 280 cm
c) x>1, je-li x reálné číslo

Řešení:

a) dnes není svátek
b) existuje žijící člověk, který má 280 cm nebo více
c) $x \leq 1$, je-li x reálné číslo

2.1.3 Utvořte disjunkci $\vee$ dvou výroků p , q a určete pravdivost složeného výroku, je-li

p = číslo 12 je násobkem čísla 2,
q = číslo 12 je násobkem čísla 5 ,

Řešení :

$p \vee q$ = (číslo 12 je násobkem čísla 2) $\vee$ (číslo 12 je násobkem čísla 5)=

= číslo 12 je násobkem čísla 2 nebo 5

Složený výrok je pravdivý přesto, že výrok q je nepravdivý.

2.1.4 Určete konjunkci $\wedge$ dvou výroků p, q , je-li

p = reálné číslo x je menší než 2 ,
q = reálné číslo x je větší nebo rovno číslu –1 ,

Řešení :

$$p \wedge q = (x \leq 2) \wedge (x > -1) = (-1, 2\rangle$$

2.1.5 Dosaďte výroky $p = \sqrt{4} = -2$, $q = 3 + 4 = 7$ do uváděné výrokové formule

a) $p \Rightarrow q$

b) $\neg\ p \Rightarrow q$

c) $q \Rightarrow p$

d) $\neg\, q \Rightarrow \neg\ p$

Řešení :

a) je-li $\sqrt{4} = -2$, pak 3+4=7 výrok pravdivý

b) je-li $\sqrt{4} \neq -2$, pak 3+4=7 výrok pravdivý

c) je-li 3+4=7 , pak $\sqrt{4} = -2$, výrok nepravdivý

d) je-li $3+4 \neq 7$, pak $\sqrt{4} \neq -2$, výrok pravdivý

2.1.6 Určete pravdivostní hodnotu složeného výroku $((2.3 = 6) \vee (3.4 = 16)) \wedge (1 < 2)$

$p = (2.3 = 6)$, $q = (3.4 = 16)$, $p \vee q = ((2.3 = 6) \vee (3.4 = 16))$,

$v = ((2.3 = 6) \vee (3.4 = 16)) \wedge (1 < 2)$

Pravdivostní tabulka pak má tvar:

p	q	$p \vee q$	v
1	0	1	1

Z uvedené tabulky plyne, že složený výrok je pravdivý.

2.1.7 Určete pravdivostní hodnotu složeného výroku

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\vee$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0

3. Reálná a komplexní čísla

3.1.1 Určete supremum, infimum, maximum a minimum množiny **M**

a) **M** = $\langle$ -5,-2)

b) **M** = $\langle$ 0,1 $\rangle \cup \langle$ 2,3 $\rangle$

c) **M** = (-1, ∞)

a) sup **M** = -2 , inf **M** =-5 , max **M** neexistuje (otevřená množina), min **M** =-5

b) sup **M** = 3 , inf **M** =0 , max **M** = 3, min **M** = 0

c) sup **M** neexistuje , inf **M** =-1 , max **M** neexistuje (otevřená množina), min **M** neexistuje

3.1.2 Zapište pomocí nerovnic s absolutní hodnotou okolí daného čísla o daném poloměru:

a) okolí čísla 6 o poloměru 2
b) okolí čísla –3 o poloměru 1
c) okolí čísla 1.5 o poloměru 0.5

Řešením jsou nerovnice:

a) (6-2,6+2) = (4 , 8) = {x∈ **R** ; $|x-6|<2$ }

b) (-3-1,-3+1) = (-4 , -2) = {x∈ **R** ; $|x+3|<1$ }

c) (1.5-0.52,1.5+0.5) = (1 , 2) = {x∈ **R** ; $|x-1.5|<0.5$ }

3.1.3 Pomocí binomické věty řešte $(2-\sqrt{3})^3$

$$(2-\sqrt{3})^3 = \binom{3}{0}.2^3.(-\sqrt{3})^0 + \binom{3}{1}.2^{3-1}.(-\sqrt{3})^1 + \binom{3}{2}.2^{3-2}.(-\sqrt{3})^2 + \binom{3}{3}.2^{3-3}.(-\sqrt{3})^3 =$$
$$= 1.8.1 - 3.4.\sqrt{3} + 3.2.3 - 1.1.3.\sqrt{3} = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$$

3.2.1 Vypočtěte $(2+3i)^2 + (1-2i)$

$$(2+3i)^2 + (1-2i) = (2+3i).(2+3i) + (1-2i) = 2.2 + 2.3i + 2.3i + 3.3i^2 + 1 - 2i =$$
$$= 4 + 6i + 6i - 9 + 1 - 2i = -4 + 10i$$

3.2.2 Vypočtěte $\frac{2-3i}{5+2i}$

$$\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{2-3i}{5+2i}.\frac{5-2i}{5-2i} = \frac{(2-3i).(5-2i)}{(5+2i).(5-2i)} = \frac{10-15i-4i+6i^2}{25+10i-10i-4i^2} =$$
$$= \frac{10-19i-6}{25+4} = \frac{4-19i}{29} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29}i$$

3.2.3 Vypočtěte $|2-3i|$

$$|2-3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

3.3.1 Řešte binomickou rovnici $x^3-1=0$

$$x^3-1=0$$

$$(x^3-1):(x-1)=x^2+x+1 \qquad x^2+x+1=0 \qquad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}.i$$

$$\underset{-}{}x^3 - \underset{+}{}x^2$$

$$0 + x^2 - 1$$

$$\underset{-}{}x^2 - \underset{+}{}x$$

$$0 + x - 1$$

$$\underset{-}{}x - \underset{+}{}1$$

$$0$$

Kořeny jsou $x_0=1,\quad x_1=-\frac{1}{2}+i\sqrt{3},\quad x_2=-x_1=-\frac{1}{2}+i\sqrt{3}$

Zkouška :

$$(\mathrm{x}-1).(\mathrm{x}+\frac{1}{2}-i\sqrt{3}).(x+\frac{1}{2}-i\sqrt{3})=(x-1).(x^2+x+1)=x^3-1$$

3.3.2 Řešte rovnici $z^5+1=0$.

Budeme hledat řešení rovnice převedením na problematiku nalezení kořenů komplexního čísla $\mathrm{z}=-1$.

$$z^5+1=0 \quad \to \quad z^5=-1 \quad \to \quad z=\sqrt[5]{-1}$$

číslo $\mathrm{z}=-1$ převedeme na goniometrický tvar

$-1=\cos\pi+i\sin\pi$ pak

$$\sqrt[5]{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5} \quad \text{pro } k=0,1,2,3,4.$$

Dostaneme tedy pět kořenů :

$$z_0=\cos 36^0+i\sin 36^0 \;,$$
$$z_1=\cos 108^0+i\sin 108^0 \;,$$
$$z_2=\cos\pi+i\sin\pi \;,$$
$$z_3=\cos 252^0+i\sin 252^0 \;,$$
$$z_4=\cos 324^0+i\sin 324^0 \;.$$

4. Vektory a matice

4.1.1 Sečtěte vektory $a=[1,4,-2]$, $b=[3,-2,2]$

$$a+b=[1,4,-2]+[3,-2,2]=[1+3,4-2,-2+2]=[4,2,0]$$

4.1.2 Odečtěte vektory $a=[1,4,-2]$, $b=[3,-2,2]$

$$a-b=[1,4,-2]-[3,-2,2]=[1-3,4+2,-2-2]=[-2,6,-4]$$
$$b-a=[3,-2,2]-[1,4,-2]=[3-1,-2-4,2+2]=[2,-6,4]$$

Platí tedy: $a-b=-(b-a)$

4.1.3 Určete vektor $v=2a$, je-li $a=[2,-5,1,9,-7]$

$$v=2[2,-5,1,9,-7]=[4.-10,2,18,-14]$$

4.1.4 Určete vektor $v=-3a-0b$, je-li $a=[3,2,-1]$ $b=[0,3,9]$

$$v=-3a-0b=-3[3,2,-1]\ -0[0,3,9]\ =[-9,-6,3]$$

4.2.1 Jsou dány čtvercové matice A,B,C

$$A=\begin{bmatrix}3&0&-1\\2&5&1\\7&-2&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-3&2&1\\6&5&4\\0&2&-4\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

a) vypočtěte A+B

$$A+B=\begin{bmatrix}3&0&-1\\2&5&1\\7&-2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3&2&1\\6&5&4\\0&2&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&0\\8&10&5\\7&0&-4\end{bmatrix}$$

b) vypočtěte B-A

$$B-A=\begin{bmatrix}-3&2&1\\6&5&4\\0&2&-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0&-1\\2&5&1\\7&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&2&2\\4&0&3\\-7&4&-4\end{bmatrix}$$

c) vypočtěte 2.C

$$2.C=2.\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&2\\4&4&2\\0&-2&0\end{bmatrix}$$

d) vypočtěte A-3B+2C

$$A\text{-}3B\text{+}2C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -18 & -15 & -12 \\ 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -2 \\ -12 & -6 & -9 \\ 7 & -10 & 12 \end{bmatrix}$$

e) vypočtěte (A+B)-(B-A)-2A

$$(A+B)\text{-}(B - A)\text{-}2A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 8 & 10 & 5 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -7 & 4 & -4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 8 & 10 & 5 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & -3 \\ 7 & -4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -4 & -10 & -2 \\ -14 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2.2 Vypočtěte A+E ,je-li

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A+E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.3 Vypočtěte A+B , je-li

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -a & b \\ c & -b \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & b \\ c & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c+b \\ d+c & 0 \end{bmatrix}$$

4.3.1 Vypočtěte součin matic A . B a B . A, jestliže

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.1+(-5).(-3)+7.5 & 3.0+(-5).4+7.7 \\ (-2).1+9.(-3)+4.5 & (-2).0+9.4+4.7 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 53 & 29 \\ -9 & 64 \end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.3+0.(-2) & 1.(-5)+0.9 & 1.7+0.4 \\ (-3).3+4.(-2) & (-3).(-5)+4.9 & (-3).7+4.4 \\ 5.3+7.(-2) & 5.(-5)+7.9 & 5.7+7.4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -17 & 51 & -5 \\ 1 & 38 & 63 \end{bmatrix}$$

4.3.2 Přesvědčeme se, že platí A. E = E . A = A je-li E jednotková matice stejného řádu jako matice A,

která je tvaru $A=\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$A.E=\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.1+(-7).0 & 3.0+0.5 \\ 4.1+5.0 & 4.0+5.1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=A$$

$$E.A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.3+0.4 & 1.(-7)+0.5 \\ 0.3+1.4 & 0.(-7)+1.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=A$$

4.3.3 Vypočtěte součin matic A . B a B . A, jestliže

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 & 22 \\ 1 & -48 \end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -19 & 8 \\ 39 & -38 \end{bmatrix}$$

4.3.4 Vypočtěte součin matic A . B a B . A, jestliže

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -3\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 4\end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix}5 & 2 & -3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}5 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 4 & -6\\ -5 & -2 & 3\\ 20 & 8 & -12\end{bmatrix}$$

4.3.5 Vypočtěte součin A^2 , A^3 , je-li

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^2 = A, A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 16\\ -8 & -7\end{bmatrix}$$

$$A^3 = A, A.A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}= A^2.A=\begin{bmatrix}1 & 16\\ -8 & -7\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-29 & 20\\ -10 & -39\end{bmatrix}$$

4.3.6 Vypočtěte součin matic A.B , kde $A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

$$A.B=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

4.4.1 Vypočtěte hodnost h(A) matice A, je-li

$$A=\begin{bmatrix}2&4&6&-8&0\\3&7&-2&-1&5\\10&22&8&-18&10\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&4&6&-8&0\\3&7&-2&-1&5\\10&22&8&-18&10\end{bmatrix}\begin{array}{l}/(2)\\ \\ /(2)\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&-4&0\\3&7&-2&-1&5\\5&11&4&-9&5\end{bmatrix}\begin{array}{l}1.\check{r}\\+(1.\check{r}).(-3)\\+(1.\check{r}).(-5)\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&3&-4&0\\0&1&-11&11&5\\0&1&-11&11&5\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{vynech.}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&-4&0\\0&1&-11&11&5\end{bmatrix}\rightarrow\ h(A)=2$$

4.4.2 Vypočtěte hodnost h(A) matice A, je-li

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\\3&2\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\\3&2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{array}{c}1.\check{r}\\-2.(1.\check{r})\\-(1.\check{r}+2.\check{r})\\+1.\check{r}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&-1\\0&5\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \mathit{vynech.}\\ \mathit{vynech.}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&-1\\0&5\end{bmatrix}\rightarrow\quad h(A)=2$$

4.4.3 Rozhodněte, pro které číslo a má matice A hodnost h(A)=3

$$A=\begin{bmatrix}-2&0&1\\1&2&1\\0&3&a\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-2&0&1\\1&2&1\\0&3&a\end{bmatrix}\begin{array}{l}\rightarrow 3.\check{r}\\\rightarrow 1.\check{r}\\\rightarrow 2.\check{r}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&a\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}1.\check{r}\\2.\check{r}\\+2.(1.\check{r})\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&a\\0&4&3\end{bmatrix}\begin{array}{l}1.\check{r}\\2.\check{r}\\-\frac{4}{3}.(2.\check{r})\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&a\\0&0&3-\frac{4}{3}a\end{bmatrix}$$

h(A)=3 jen pro $3-\dfrac{4}{3}a\neq 0$, tedy pro $a\neq\dfrac{9}{4}$

5. Determinanty

5.1.1 Vypočtěte hodnotu determinantu $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = (3).(-6) - (4).(5) = -18 - 20 = -38$$

5.1.2 Vypočtěte hodnotu determinantu $\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} = a.g - c.e$$

5.1.3 Vypočtěte hodnotu determinantu $\det A = \begin{vmatrix} 2+3i & 1+i \\ 1-i & 2-3i \end{vmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2+3i & 1+i \\ 1-i & 2-3i \end{vmatrix} = (2+3i).(2-3i) - (1+i).(1-i) = (4+9) - (1+1) = 11$$

5.1.4 Vypočtěte hodnotu determinantu $\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 0.0 = 1$$

5.1.5 Vypočtěte hodnotu determinantu $\det C = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$

$$\det C = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x.\sin x - \cos x.(-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

5.2.1 Vypočtěte hodnotu determinantu $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -7 & 6 & 5 \\ 8 & -9 & 10 \end{vmatrix}$ pomocí Sarrusova pravidla

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 4 \\ -7 & 6 & 5 \\ 8 & -9 & 10 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ -7 & 6 \\ 8 & -9 \end{array} =$$

$$= +2.6.10 + (-3).5.8 + 4.(-7).(-9) - 4.6.8 - 2.5.(-9) - (-3).(-7).10 = +120 - 120 + 252 - 192 + 90 - 210 =$$
$$= -60$$

5.2.2 Vypočtěte hodnotu determinantu $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ pomocí Sarrusova pravidla

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = a.c.b + b.a.c + c.b.a - c.c.c - b.b.b - c.c.c = 3.a.b.c - c^3 - b^3 - a^3$$

5.2.3 Vypočtěte hodnotu determinantu $\det\ \mathrm{J(r,x,z)}=\begin{vmatrix} .\cos x & \sin x & 0 \\ -r\sin x & r\cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\det\ \mathrm{J(r,x,z)}=\begin{vmatrix} .\cos x & \sin x & 0 \\ -r\sin x & r\cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos x.(r\cos x).1 + \sin x.0.0 + (-r\sin x).0.0 -$$

$$-\,0.(r\cos x).0 - \cos x.0.0 - \sin x.(-r.\sin x).1 = r.\cos^2 x + 0 + 0 - 0 - 0 + r.\sin^2 x =$$

$$= r.(\cos^2 x + \sin^2 x) = r.1 = r$$

5.2.4 Přesvědčete se, že determinant matice A a transponované matice A^{T} mají stejnou hodnotu,

když matice $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Původní matice $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, transponovaná matice $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$,

$$\det \mathrm{A}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 56 - 105 - 96 = -217$$

$$\det \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 56 - 105 - 96 = -217$$

5.3.1 Vypočtěte hodnotu determinantu 4.řádu det D= $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

pomocí Laplaceovy věty o rozvoji determinantu a to podle 3.řádku

$$\det D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} + (-7).(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -8 & 8 & 9 \end{vmatrix} +$$

$$+6.(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 2.(-18+80-64)+7.(-27+40-40-96)+$$

$$+6.(54-64+80-18) = -4-861+312 = -553$$

5.3.2 Přesvědčete se, že různé rozvoje dají stejnou hodnotu determinantu. Rozviňte determinant 4.řádu

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ podle 1.řádku a podle 1.sloupce

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 0 + (-1).(-1)^{1+4}.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2.(4+4+0-6-2-0) - (-8+0-12-0+4+16) + (0+0+8-0-4-4) = 0-0+0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 4.(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= 2.(4+4+0-6-2-0) - 2.(-4+0+0+2+2-0) + 4\left(-4+0-1+2+3-0\right) = 0+0+0 = 0$$

5.3.3 Rozvojem dle řádku samých nul se přesvědčete, že hodnota determinantu A, jehož řádek (sloupec) obsahuje samé nuly má nulovou hodnotu.

$$. \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0.(-1)^{2+4}.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -0 + 0 - 0 + 0 = 0$$

5.4.1 Úpravou na trojúhelníkový tvar vypočtěte hodnotu determinantu $\det D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$$\det D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1.ř \\ -2.(1.ř) \\ -1.(1.ř) \end{matrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = 3.(-\frac{1}{3}).\begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix}\begin{matrix} 1.ř \\ 2.ř \\ +(\frac{2}{3})(2.ř) \end{matrix} =$$

$$= 3.(-\frac{1}{3}).\begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3.(-\frac{1}{3}).1.1.0 = 0$$

Zkouška pomocí Sarrusova pravidla :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3.1.(-1) + 2.0.1 + 1.2.0 - 1.1.1 - 3.0.0 - 2.2.(-1) = -3 - 1 + 4 = 0$$

5.4.2 Úpravou na trojúhelníkový tvar vypočtěte hodnotu determinantu

$$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 6 & 28 & 33 & 8 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 6 & 28 & 33 & 8 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1.ř \\ -2.(1.ř) \\ .3+(-5).(2.ř) \\ .5-4.(3.ř) \end{matrix} = \frac{1}{3.5} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -20 & -3 & -1 \\ 0 & 25 & 14 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1.ř \\ 2.ř \\ +10.(2.ř) \\ .4+5.(3.ř) \end{matrix} =$$

$$= \frac{1}{3.5.4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 41 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1.ř \\ 2.ř \\ 3.ř \\ +3.(3.ř) \end{matrix} = \frac{1}{3.5.4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1.ř \\ 2.ř \\ 3.ř \\ .13+2.(3.ř) \end{matrix} =$$

$$= \frac{1}{3.5.4.13} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = \frac{3.2.(-13).50}{3.5.4.13} = -5$$

5.4.3 Přesvědčete se, že hodnota determinantu A a determinantu transponované matice k matici A je stejná.

$$\det\ A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & -a \end{vmatrix} = a.(-a) - c.b = -a^2 - c.b$$

$$\det\ A^T = \begin{vmatrix} a & b \\ c & -a \end{vmatrix} = a.(-a) - b.c = -a^2 - c.b$$

5.4.4 Přesvědčete se, že výměna dvou po sobě jdoucích řádků způsobí změnu znaménka.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 - 12 - 9 - 4 - 4 = -40$$

Výměna prvých dvou řádků:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 9 + 4 + 12 + 12 - 1 = 40$$

6. Řešení soustav lineárních rovnic

6.1.1 Řešte soustavu lineárních rovnic A.X=B pomocí Gaussovy eliminační metody

$$\begin{aligned} 2x-3y+4z&=8\\ 3x+5y-\ z&=10\\ 7x-\ y+7z&=15 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 8\\ 3 & 5 & -1 & 10\\ 7 & -1 & 7 & 15 \end{array}\right)\begin{array}{c} 1.ř\\ +(-1{,}5).(1.ř)\\ +(-3{,}5).(1.ř) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 8\\ 0 & 9{,}5 & -7 & -2\\ 0 & 9{,}5 & -7 & -13 \end{array}\right)\begin{array}{c} 1.ř\\ 2.ř\\ +(-1).(2.ř) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 8\\ 0 & 9{,}5 & -7 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right)$$

Protože matice soustavy má hodnost h(A)=2 a rozšířená matice soustavy má hodnost h(A | B)=3, nemá soustava A.X=B dle Frobeniovy věty řešení

6.1.2 Řešte soustavu lineárních rovnic A.X=B pomocí Gaussovy eliminační metody

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=5\\ 3x-4y+5z&=6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5\\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{c} 1.ř\\ +(-3).(1.ř) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5\\ 0 & -10 & 14 & -9 \end{array}\right)$$

Matice soustavy i rozšířená matice soustavy mají hodnost h (A)=h (A | B)=2, počet proměnných n=3. Podle věty Frobeniovy je n-h (A) =1 proměnná volitelná. Zvolme tedy z = t. Pak ze soustavy plyne

$$z = t \qquad y=\frac{1}{10}(14t+9) \qquad x=\frac{1}{5}(t+16)\quad ,$$

kde t je libovolné reálné číslo.

6.1.3 Řešte soustavu lineárních rovnic A.X=B pomocí Gaussovy eliminační metody

$$\begin{aligned} 5x-9y+5z&=1\\ x-2y+\ z&=0\\ 2x+3y+3z&=2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}5&-9&5&1\\1&-2&1&0\\2&3&3&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \text{1.ř}\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\5&-9&5&1\\2&3&3&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\text{1.ř}\\ -5.(\text{1.ř})\\ -2.(\text{1.ř})\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&1&0&1\\0&7&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\text{1.ř}\\ -5.(\text{1.ř})\\ -2.(\text{1.ř})\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&1&0&1\\0&7&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\text{1.ř}\\ \text{2.ř}\\ -7.(\text{2.ř})\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-5\end{array}\right)\begin{array}{l}\text{1.ř}\\ \text{2.ř}\\ -7.(\text{2.ř})\end{array}$$

zpětný chod :

$z=-5 \qquad y=1 \qquad x=0-z+2y=5+2=7$, když dosadíme vypočtené hodnoty y a z .

6.1.4 Řešte soustavu lineárních rovnic A.X=0 pomocí Gaussovy eliminační metody

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+\ 3x_3&=0\\ 4x_1+7x_2+\ 5x_3&=0\\ x_1+6x_2+10x_3&=0\\ x_1+\ x_2-\ 4x_3&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&7&5\\1&6&10\\1&1&-4\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{1.ř}\\ -4.(\text{1.ř})\\ -(\text{1.ř})\\ -(\text{1.ř})\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-7\\0&4&7\\0&-1&-7\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{1.ř}\\ \text{2.ř}\\ +4.(\text{2.ř})\\ (vynech)\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-7\\0&4&7\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{1.ř}\\ .(-1)\\ +(4).(\text{2.ř})\end{array}\sim$$

$$□\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&7\\0&0&-21\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{1.ř}\\ \text{2.ř}\\ /(-21)\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&7\\0&0&1\end{pmatrix} \quad ,$$

h (A)=h (A | B)=n=3 , soustava má triviální řešení $x_1=x_2=x_3=0$

6.1.5 Řešte soustavu lineárních rovnic A.X=B pomocí Gaussovy eliminační metody

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \quad 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + \quad 6x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + \quad x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 1 & 3 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & 1 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{10} \end{array}\right)$$

h(A)=2, h(A/B)=2, n=3, tedy jednu proměnnou volíme jako parametr

$$x_3 = t$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{10}$$

$$x_1 = 1 - 2.(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{10}) - 3.t = \frac{12}{10} - 2t$$

6.2.1 Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x + \quad y + 3z &= 7 \\ x - 3y + 2z &= 5 \\ x + \quad y + \quad z &= 3 \end{aligned}$$

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 + 2 + 9 - 2 - 1 = 8,$$ det(A) ≠ 0, tedy soustava má právě jedno řešení

$$\det(\mathrm{A_x}) = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -21 + 15 + 6 + 27 - 14 - 5 = 8 \qquad x = \frac{\det(\mathrm{A_x})}{\det(\mathrm{A})} = \frac{8}{8} = 1 \qquad \textit{tedy } x = 1$$

$$\det(\mathrm{A_y}) = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 9 + 14 - 15 - 6 - 7 = 0 \qquad y = \frac{\det(\mathrm{A_y})}{\det(\mathrm{A})} = \frac{0}{8} = 0 \qquad \textit{tedy } y = 0$$

$$\det(\mathrm{A_z}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 7 + 5 + 21 - 5 - 3 = 16 \qquad z = \frac{\det(\mathrm{A_Z})}{\det(\mathrm{A})} = \frac{16}{8} = 2 \qquad \textit{tedy } z = 2$$

7. Polynomy a jejich podíl

7.1.1 Rozložte polynom $2x^2+3x+1$ na součin kořenových činitelů.

$$2x^2+3x+1=2x^2+2x+x+1=2x(x+1)+(x+1)=(x+1)(2x+1)$$

nebo

$$2x^2+3x+1=0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2.2}=\frac{-3\pm1}{4} \qquad x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=-1$$

$$2x^2+3x+1=2.(x+\frac{1}{2}).(x+1)=(2x+1)(x+1)$$

7.1.2 Rozložte polynom x^3-3x-2 na součin kořenových činitelů.

$$x^3-3x-2=x^3-4x+x-2=x(x^2-4)+x-2=x.(x-2).(x+2)+x-2=$$
$$=(x-2)(x^2+2x+1)=(x-2).(x+1)^2$$

7.1.3 Rozložte polynom $x^2+7x+12$ na součin kořenových činitelů.

$$x^2+7x+12=(x+3).(x+4)$$

7.1.4 Rozložte polynom $x^3-7x^2+14x-8$ na součin kořenových činitelů.

$$x^3-7x^2+14x-8=x^3-8-7x(x-2)=(x-2)(x^2+2x+4)-7x(x-2)=$$
$$=(x-2)(x^2+2x+4-7x)=(x-2)(x^2-5x+4)=(x-2)(x-1)(x-4)$$

7.1.5 Rozložte polynom x^3-3x^2+4 na součin kořenových činitelů.

$$x^3-3x^2+4=x^3-2x^2-x^2+4=x^2(x-2)-(x^2-4)=(x-2)(x^2-x-2)=$$
$$=(x-2)^2(x+1)$$

7.2.1 Užitím Hornerova schematu rozložte na součin kořenových činitelů
$$x^5+2x^4-9x^3-4x^2+30x-36$$

	1	2	-9	-4	30	-36
1	1	3	-6	-10	20	-16
-1	1	1	-10	6	24	-60
2	1	4	-1	-6	18	0
2	1	6	11	16	50	
-2	1	2	-5	4	10	
3	1	7	20	54	180	
-3	1	1	-4	6	0	
-3	1	-2	2	0		

$$x^5+2x^4-9x^3-4x^2+30x-36=(x-2)(x^4+4x^3-x^2-6x+18)=$$
$$=(x-2)(x+3)(x^3+x^2-4x+6)=$$
$$=(x-2)(x+3)^2(x^2-2x+2)$$

7.2.2 Užitím Hornerova schematu rozložte na součin kořenových činitelů

$$x^6 - 6x^5 + 11x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x$$

	1	-6	11	-2	-12	8	0
0	1	-6	11	-2	-12	8	0
1	1	-5	6	4	-8	0	
1	1	-4	2	6	-2		
-1	1	-6	-2	-8	0		
-1	1	-7	19	-27			
2	1	-4	4	0			
2	1	-2	0				
2	1	0					

$$x^6 - 6x^5 + 11x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x = x(x-1)(x+1)(x-2)^3$$

7.3.1 Rozložte racionální lomenou funkci $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(2x+1)}$ na parciální zlomky

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1} \quad /.(x+1)(2x+1)$$

$$x = A(2x+1) + B(x+1)$$

$$x = x(2A+B) + (A+B) \qquad ¨ \qquad 2A+B=1 \quad , \quad A+B=0$$

tedy $A = 1, \quad B = -1$

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{2x+1}$$

7.3.2 Rozložte racionální lomenou funkci $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4}$ na parciální zlomky

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^4} \quad /.(x-2)^4$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = A(x-2)^3 + B(x-2)^2 + C(x-2) + D$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = A(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + B(x^2 - 4x + 4) + C(x-2) + D$$

vyřešením soustavy pro A, B, C, D dostaneme

$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -1, \quad D = 1$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4} = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^4}$$

7.3.3 Rozložte racionální lomenou funkci $f(x) = \dfrac{8x-31}{x^2-9x+14}$ na parciální zlomky

$$\frac{8x-31}{x^2-9x+14} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-2} \quad /.(x-7)(x-2)$$

$$8x-31 = A(x-2) + B(x-7)$$

užijeme dosazovací metodu

$$x = 2 \quad \to \quad 16-31 = B(2-7) \quad \to \quad B = 3$$

$$x = 7 \quad \to \quad 56-31 = A(7-2) \quad \to \quad A = 5$$

$$\frac{8x-31}{x^2-9x+14} = \frac{5}{x-7} + \frac{3}{x-2}$$

7.3.4 Rozložte racionální lomenou funkci $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ na parciální zlomky

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \quad /.(1+x^3)$$

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$1 = x^2(A+B) + x(-A+B+C) + (A+C)$$

$$\begin{aligned} A + B \quad &= 0 \\ -A + B + C &= 0 \qquad \to \quad A = \frac{1}{3}\ ,\ B = -\frac{1}{3}\ ,\ C = \frac{2}{3} \\ A \quad + C &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

7.3.5 Rozložte racionální lomenou funkci $f(x) = \dfrac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}$ na parciální zlomky

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} \quad /.(x^2+2)^2$$

$$x^3+x-1 = (Ax+B)(x^2+2) + Cx + D$$

$$x^3+x-1 = x^3(A) + x^2(B) + x(2A+C) + (2B+D)$$

$$\begin{aligned} A \qquad &= 1 \\ B \qquad &= 0 \\ 2A \quad + C \quad &= 1 \qquad \to C = -1\ ,\ D = -1 \\ 2B \quad + D &= -1 \end{aligned}$$

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{x^2+2} - \frac{x+1}{(x^2+2)^2}$$

8. Geometrické vektory

8.1.1 V trojúhelníku ABC je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, S je střed strany BC, T těžiště trojúhelníka . Pomocí vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ určete vektory $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AT}$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}, \qquad \overrightarrow{AS} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \ , \ \overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

8.1.2 Určete projekci vektoru $\vec{a}$ na přímku p , je-li dáno $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $|\vec{a}| = 2$.

$$a_p = |\vec{a}|.\cos\varphi \quad , \text{ proto } a_p = 2.\cos\frac{\pi}{4} = 2.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \ .$$

8.2.1 Jaké musí být číslo x , aby dané dva vektory $\vec{a} = xi + 5j$, $\vec{b} = 3i - j$ byly kolineární .

Musí platit $\vec{a} = k.\vec{b} \rightarrow 5j = -k.j \rightarrow k = -5$. Tedy je $x = k.3 = (-5).3 = -15$.

8.2.2 Vyšetřete, zda dané tři vektory $\vec{a} = k$, $\vec{b} = i - j - k$, $\vec{c} = i - j + k$ jsou komplanární. Jestliže ano, nalezněte vztah mezi nimi.

Pro závislost musí platit $m.\vec{a} + n.\vec{b} + p.\vec{c} = \vec{0}$, tedy musíme řešit soustavu tří lineárních rovnic :

$$0.m + 1.n + 1.p = 0$$
$$0.m - 1.n - 1.p = 0$$
$$1.m - 1.n + 1.p = 0$$

Z prvních dvou rovnic plyne $p = -1$ a $n = 1$, dosazením do třetí rovnice je $m = 2$.

Dané tři vektory jsou komplanární .

8.3.1 Vynásobte skalárně vektory $\vec{a} = (3i - 2j)$, $\vec{b} = (i + 4j)$.

$$\vec{a}.\vec{b} = (3i - 2j).(i + 4j) = 3.1 + (-2).4 = -5$$

8.3.2 Vynásobte skalárně vektory $\vec{a} = 2i + 3j + \sqrt[3]{2}k$, $\vec{b} = -2i + 2j + \sqrt[3]{4}k$.

$$\vec{a}.\vec{b} = (2i + 3j + \sqrt[3]{2}k).(-2i + 2j + \sqrt[3]{4}k) = 2.(-2) + 3.2 + \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4} = -4 + 6 + 2 = 4$$

8.3.3 Určete úhel vektorů $\vec{a} = 3i + 2j$, $\vec{b} = i + 5j$.

$$\vec{a} = 3i + 2j \quad , \quad \vec{b} = i + 5j$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{|3.1 + 2.5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}.\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}.\sqrt{26}} = \frac{13}{13.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

tedy $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

8.3.4 Zjistěte, zda vektory $\vec{a} = 2i - 5j + k$, $\vec{b} = 3i + 2j + 4k$ jsou na sebe kolmé.

$$\vec{a} = 2i - 5j + k \quad , \quad \vec{b} = 3i + 2j + 4k$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{|2.3 + (-5).2 + 1.4|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}.\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{0}{\sqrt{30}.\sqrt{29}} = 0 \to \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Tedy vektory jsou na sebe kolmé.

8.4.1 Určete vektorový součin vektorů $\vec{a} = 2i - 3j + k$, $\vec{b} = -i + 2j - 4k$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2i - 3j + k) \times (-i + 2j - 4k) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 12i - j + 4k - 3k - 2i + 8j = 10i + 7j + k$$

8.4.2 Vypočtěte $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ a určete geometrický význam vypočtené hodnoty, je-li $\vec{a} = 2i + 3j$, $\vec{b} = 3j + 2k$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2i + 3j\ ) \times (3j + 2k) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6i + 0 + 6k - 0 - 0 - 4j = 6i - 4j + 6k$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$$

Geometrický význam je obsah rovnoběžníka z uvedených vektorů.

8.5.1 Vypočtěte hodnotu smíšeného součinu $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]$, jsou-li vektory dány

$$\vec{a} = i - 3j + k \ , \ \vec{b} = 2i + j - 3k \ , \ \vec{c} = i + 2j + k$$

$$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9 + 4 - 1 + 6 + 6 = 25$$

nebo

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 1 + 6 + 6 - 1 = 25$$

8.5.2 Zjistěte, zda zadané vektory jsou komplanární

$$\vec{a} = i - 2j + k \ , \ \vec{b} = 3i + j - 2k \ , \ \vec{c} = 7i + 14j - 13k$$

$$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 7 & 14 & -13 \end{vmatrix} = -13 + 28 + 42 - 7 + 28 - 78 = 0$$

Tedy zadané vektrory jsou komplanární.

8.5.3 Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu ABCDEFGH , jsou-li dány vrcholy A[3,0,4] , B[-1,-1,7] , C[0,-2,-3] , E[6,5,4].

Objem je dán jako smíšený součin tří vektorů $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{AB} = (-4,-1,3) \ , \ \overrightarrow{AC} = (-3,-2,-7) \ , \ \overrightarrow{AE} = (3,5,0)$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 21 - 45 + 18 - 140 - 0 = -146$$

8.5.4 Vypočtěte objem čtyřstěnu ABCD, jsou-li dány body A[1,2,3] , B[-1,0,0] , C[0,-2,0] , D[0,0,-3].

Objem čtyřstěnu ABCD je dán jako $\left|\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right]\right|$.

$$\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-48 - 6 - 6 + 12 + 12 + 12) =$$

$$= \frac{-24}{6} = -4$$

$$\left|\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right]\right| = |-4| = 4$$

9. Analytická geometrie v prostoru

9.1.1 Napište rovnici roviny, která je určena body A[1,-2,3], B[-4,5,6], C[7,8,-9].

1) Jeden způsob řešení:

Normálový vektor **n** je kolmý k vektorům $\overline{AB}$ =(**r**$_2$–**r**$_1$) =**c**=(-5,7,3)
a $\overline{AC}$ =(**r**$_3$–**r**$_1$) **b**=(6,10,-12),

$$\text{Tedy } \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 10 & -12 \\ -5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 114\,\mathbf{i} + 42\,\mathbf{j} + 92\,\mathbf{k} = (114,42,92).$$

Rovnice hledané roviny je (**r** –**r**$_1$).**n**=0, tedy (x-1,y+2,z-3). (114,42,92)=0.
Tedy rovnice je tvaru 57x+21y+46z -153=0.

2) Druhý způsob řešení:

V kartézské soustavě souřadnic má rovnice hledané roviny tvar

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -5 & 7 & 3 \\ 6 & 10 & -12 \end{vmatrix} = -84(x-1) - 50(z-3) + 18(y+2) -$$

$$-42(z-3) - 30(x-1) - 60(y+2) = -114x - 42y - 92z + 306 = 0$$

$$57x + 21y + 46z - 153 = 0$$

Tedy rovnice je tvaru 57x+21y+46z -153=0.

9.1.2 Určete rovnici roviny, která prochází body M[3,4,5] a N[-6,7,2] a je kolmá k rovině 2x- 3y +4z –5=0.

Vektor **n**$_2$ normály hledané roviny je kolmý k vektoru $\overline{MN}$ =(**r**$_2$–**r**$_1$)=(-9,3,-3)
a k normálovému vektoru **n**$_1$ (2,-3,4) dané roviny, a proto je **n**$_2$ = (**r**$_2$–**r**$_1$) x **n**$_1$.
Rovnice hledané roviny je pak (**r**- **r**$_1$). **n**$_2$ =0 respektive (**r**- **r**$_2$). **n**$_2$ =0 .

$$\mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -9 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3\,\mathbf{i} + 30\,\mathbf{j} + 21\,\mathbf{k} = (3,30,21)$$

(**r**- **r**$_1$) = (x-3,y-4,z-5) , (**r**- **r**$_2$) = (x+6,y-7,z-2)

pak rovnice je tvaru 3(x-3)+30(y-4)+21(z-5)=0 ,
nebo 3(x+6)+30(y-7)+21(z-2)=0 .

Po úpravách dávají obě rovnice týž výsledek x + 10y + 7z – 78 =0 .

9.2.1 Napišme obecnou rovnici roviny , která je určena parametrickými rovnicemi

x= 3 – 2u + 3v ,
y= 1 + u - 2v ,
z= 3 –4u + v .

Z daných tří rovnic vyloučíme nejprve parametr u . Dostaneme

x + 2y = 5 - v ,
z + 4y = 7 –7v .

Vyloučením parametru v z těchto dvou rovnic dostaneme -7x - 10y + z = -28 ,
Po úpravě je obecný tvar rovnice roviny 7x + 10y –z – 28 = 0 .

9.2.2 Napište parametrické rovnice roviny určené třemi body A[3,-4,5], B[-5,7,3], C[2,4,-5] .

Platí $\overline{AB}$ = **s**(-8,11,-2), $\overline{AC}$ =**t**(-1,8,-10) . Tedy parametrické rovnice jsou

$$\begin{aligned} x &= 3 - 8u - v , \\ y &= -4 + 11u + 8v , \\ z &= 5 - 2u - 10v . \end{aligned}$$

9.3.1 Určeme vzdálenost bodu T[3,6,1] od roviny x + 10y + 7z – 78 = 0 .

Ze vzorce o vzdálenosti plyne

$$v = \frac{|3+10.6+7.1-78|}{\sqrt{(1+100+49}} = \frac{8}{\sqrt{150}} = \frac{4\sqrt{6}}{15}$$

9.3.2 Určete úhel rovin x + y + z + 1 = 0 a x - 5y - 4z + 3 = 0 .

Jde o ostrý úhel, který svírají normály obou rovin. Vypočteme jej pomocí skalárního součinu těchto normálových vektorů $\mathbf{n_1}$ (1,1,1) a $\mathbf{n_2}$ (1,-5,-4) .

$$\cos\varphi = \frac{|n_1.n_2|}{|n_1|.|n_2|} = \frac{|1-5-4|}{\sqrt{3}.\sqrt{42}} = \frac{8}{\sqrt{126}}$$

9.4.1 Napište rovnici přímky dané dvěma body M[2,9,3] a N[5,3,11].

Směrový vektor přímky $\overline{MN}$ =**s**(5-2,3-9,11-3)=**s**(3,-6,8). Parametrické rovnice přímky jsou

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t , \\ y &= 9 - 6t , \\ z &= 3 + 8t . \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} x &= 5 + 3t , \\ y &= 3 - 6t , \\ z &= 11 + 8t . \end{aligned}$$

Vyloučením parametru dostaneme kanonický tvar rovnice přímky

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-9}{-6} = \frac{z-3}{8} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-11}{8} .$$

Přímku můžeme také určit jako průsečnici dvou rovin. Rovnice dostaneme vyloučením parametru t z parametrických rovnic, takže daná přímka je dána vždy dvojicí rovnic :

2x +y = 13 , 4y + 3z = 45

nebo

2x +y = 13 , 8x – 3z = 7

nebo

4y + 3z = 45 , 8x – 3z = 7 .

9.4.2 Napište rovnici přímky , která je rovnoběžná s přímkou p , určenou body A[2,1,3] , B[7,3,1] a prochází bodem C[-3,5,9] .

Směrový vektor dané přímky je $\overline{AB}$ = **s**(7-2,3-1,1-3)= **s**(5,2,-2) .

Kanonické rovnice mají tvar $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-9}{-2}$,

Nebo jako průsečnice dvou rovin 2x – 5y + 31 = 0 a 2x + 5z –39 = 0

9.5.1 Vypočtěte vzdálenost bodu M[3,-5,-4] od přímky $\frac{x}{7}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-3}{2}$.

Bodem M proložíme rovinu kolmou k zadané přímce. Obecná rovnice roviny je tvaru
$7(x-3) + 6(y+5) + 2(z+4) = 0$, úpravou $7x + 6y + 2z + 17 = 0$.
Přímku vyjádříme jako průsečnici dvou rovin ve tvaru
$6x - 7y = 7$ a $2x - 7z = -21$.
Řešíme tedy soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} 7x + 6y + 2z &= -17 \\ 6x - 7y \quad\quad &= 7 \\ 2x \quad\quad - 7z &= -21 \end{aligned}$$

, která má právě jedno řešení

$P[-\frac{119}{89}, -\frac{191}{89}, \frac{233}{89}]$, což je průsečík přímky s rovinou.

Vzdálenost bodu M od zadané přímky je vzdáleností bodů M a P

$$v = MP = \sqrt{(-\frac{119}{89}-3)^2+(-\frac{191}{89}+5)^2+(\frac{233}{89}+4)^2} = \ldots = \sqrt{\frac{6297}{89}} \ .$$

9.5.2 Zjistěte vzájemnou polohu přímky p: $x = t + 1$, $y = -2t - 1$, $z = 3t + 2$
a roviny $\rho : x - y - z = 0$

Dosazením z rovnice přímky do rovnice roviny dostaneme

$$t + 1 - (-2t - 1) - (3t + 2) = 0$$

$2t = 0 \ \rightarrow t = 0 \ \rightarrow$ tedy přímka p leží v rovině ρ

9.5.3 Určete úhel přímky p : $x = t + 1$, $y = t + 2$, $z = 3$, který svírá s rovinou
$\rho : 2x + 4y + 4z - 3 = 0$.

Normálový vektor roviny je: $\vec{n}$ =(2,4,4) , směrový vektor přímky je : $\vec{s}$ =(1,1,0) .
Tedy úhel φ , který svírá přímka s rovinou získáme z rovnice

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{s}|}{|\vec{n}|.|\vec{s}|} = \frac{|2.1+4.1+4.0|}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}.\sqrt{1^2+1^2+0}} = \frac{6}{6.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

odkud plyne $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

9.5.4 Vypočtěte ostrý úhel dvou rovin

$\rho : x + y + z\sqrt{2} = 3$, $\tau : x - y + z\sqrt{2} = -2$

Ostrý úhel dvou rovin je ostrý úhel jejich normál , tedy platí

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\rho.\vec{n}_\tau|}{|\vec{n}_\rho|.|\vec{n}_\tau|} = \frac{|1.1-1.1+\sqrt{2}.\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2+\sqrt{2}^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2+\sqrt{2}^2}} = \frac{2}{\sqrt{4}\sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

10. Funkce jedné proměnné

10.1.1 Určete sudost, lichost a periodičnost funkcí :

a) $f(x) = 6.\sin 2x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}.x^3$

c) $f(x) = 2^{(x-1)}$

Zadané funkce mají tyto vlastnosti :

a) $f(-x) = 6.\sin 2(-x) = -6.\sin 2x = - f(x)$ $\rightarrow$ lichá funkce

$f(x+4\pi) = 6.\sin 2(x+4\pi) = 6.\sin 2x = f(x)$ $\rightarrow$ periodická funkce

b) $f(-x) = \frac{1}{2}.(-x)^3 = \frac{1}{2}.(-1)^3.(x)^3 = -\frac{1}{2}.(x)^3 = - f(x)$ $\rightarrow$ lichá funkce

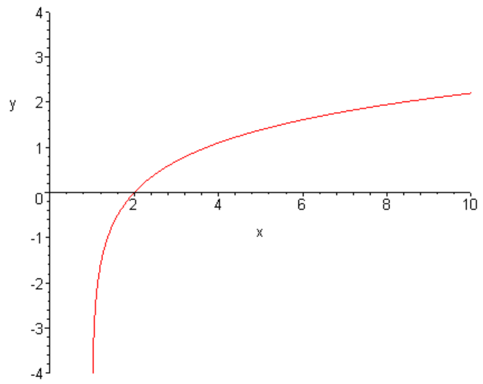
polynom není periodická funkce

c) $f(-x) = 2^{(-x-1)} = 2^{-(x+1)} \neq - f(x)$ $\rightarrow$ není lichá funkce

$f(-x) = 2^{(-x-1)} = 2^{-(x+1)} \neq f(x)$ $\rightarrow$ není ani sudá funkce

exponenciální funkce není periodická funkce

10.2.1 Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln(x-1)$

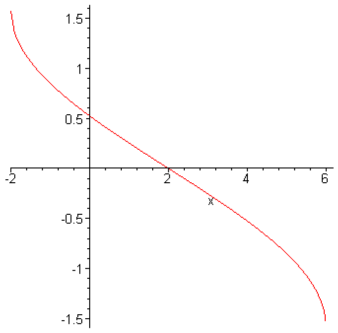


Zadaná funkce je posunutý přirozený logaritmus o jedničku doprava. Pro argument této funkce

platí nerovnice $(x-1) > 0 \rightarrow x > 1 \rightarrow x \in (1, \infty)$

Tedy $D(f) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x > 1\}$

10.2.2 Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin\dfrac{2-x}{4}$



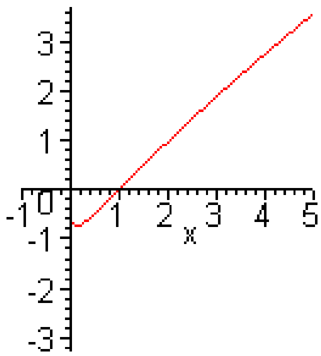
Složená cyklometrická funkce má za argument polynom 1.stupně.
Tento argument je tedy určen nerovnicí

$$-1 \le \frac{2-x}{4} \le 1 \quad \to -4 \le 2-x \le 4 \quad \to \quad -6 \le -x \le 2$$

$$-2 \le x \le 6 \quad \to \quad x \in \langle -2, 6 \rangle$$

Definiční obor $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \; ; -2 \le x \le 6 \}$

10.2.3 Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{x}.\ln x$



$f(x) = \sqrt{x}.\ln x$ je součin dvou funkcí $f_1 = \sqrt{x}$, která má $D(f_1) =< 0.\infty)$,
a $f_2 = \ln x$, která má $D(f_2) = (0, \infty)$.

$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2)$, tedy $D(f) = < 0.\infty) \cap (0, \infty) = (0, \infty)$

11. Limita a spojitost

11.1.1 Vypočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže $a_n = \dfrac{2n+1}{3n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}1 + \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

11.1.2 Vypočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže $a_n = \dfrac{n^2-n+2}{n^3+1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{n^3+1} =$$ (v čitateli je polynom nižšího stupně než ve jmenovateli, proto limita)=0

11.2.1 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x+1)$

$$\lim_{x\to 2}(x^2-x+1) = \lim_{x\to 2}x^2 - \lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}1 = (\lim_{x\to 2}x)^2 - \lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}1 =$$
$$= 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$$

nebo *přímo dosazenim do polynomu* $=2^2-2+1=4-2+1=3$

11.2.2 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 2}(x-1).(\sin\dfrac{\pi x}{4})$

$$\lim_{x\to 2}(x-1).(\sin\frac{\pi x}{4}) = \lim_{x\to 2}(x-1).\lim_{x\to 2}(\sin\frac{\pi x}{4}) = (2-1).\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

11.2.3 Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)}{(x^2-1)} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x+1)} = \frac{3}{2}$$

11.2.4 Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\cos x + \sin x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} =$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{(\cos x + \sin x)} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

11.2.5 Pomocí vztahu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5.\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \left\{ \textit{protože } \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1 \right\} = 5.1 = 5$$

11.3.1 Vypočtěte jednostrannou limitu pomocí substituce x=a-t (resp.x=a+t)

$a)$ $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

Výpočet:

$a)$ $$\lim_{x\to 2-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{t\to 0} \frac{|(2-t)-2|}{(2-t)-2} = \lim_{t\to 0} \frac{|-t|}{-t} = -\lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = -\lim_{t\to 0} 1 = -1$$

$b)$ $$\lim_{x\to 2+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{t\to 0} \frac{|(2+t)-2|}{(2+t)-2} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = \lim_{t\to 0} 1 = 1$$

11.3.2 Vypočtěte jednostrannou limitu $\lim\limits_{x\to 3-} (3x-5)$

$$\lim_{x\to 3-} (3x-5) = \lim_{t\to 0} (3(3-t)-5) = \lim_{t\to 0} (4-t) = \lim_{t\to 0} 4 = 4$$

11.4.1 Vypočtěte nevlastní limitu $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-1}{\ln(x-1)}$

$$\lim_{x\to 2-} \frac{2x-1}{\ln(x-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{2(2-t)-1}{\ln((2-t)-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{3-t}{\ln(1-t)} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2+} \frac{2x-1}{\ln(x-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{2(2+t)-1}{\ln((2+t)-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{3+t}{\ln(1+t)} = +\infty$$

11.4.2 Vypočtěte nevlastní limitu $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-1}{9-x^2}$

$$\lim_{x\to 3-}\frac{2x-1}{9-x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2(3-t)-1}{9-(3-t)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{5-2t}{6t-t^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3+-}\frac{2x-1}{9-x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2(3+t)-1}{9-(3+t)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{5+2t}{-6t-t^2}=-\lim_{t\to 0}\frac{5+2t}{6t+t^2}=-\infty$$

11.5.1 Vypočtěte limitu funkce v nevlastním bodě $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x+1}$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1+t}{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t}=1$$

11.5.2 Vypočtěte limitu v nevlastním bodě $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{3x^4-1}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3\ :x^2}{\sqrt{3x^4-1}\ :x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+3x^{-2}}{\sqrt{3-x^{-4}}}=\frac{2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\sqrt{3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}}=\frac{2+3.0}{\sqrt{3-0}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

11.5.3 Vypočtěte pomocí vztahů $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ *resp.* $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

limitu v nevlastním bodě $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3}{x})^X$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^X=\lim_{z\to\infty}(1+\frac{3}{3z})^{3z}=(\lim_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z})^z)^3=e^3$$

11.5.4 Vypočtěte pomocí vztahů $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ *resp.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2.\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=2.1=2$$

11.6.1 Zjistěte, kde je nespojitá funkce $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$

$f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$ je racionální funkce, která není definovaná v nulovém bodě jmenovatele

$x-1=0 \quad \to \quad x=1$, ale je definovaná v levém i pravém okolí tohoto bodu.

Tedy funkce v bodě x=1 není spojitá.

11.6.2 Zjistěte, kde je spojitá funkce $f(x)=\sin(2x+\pi)$

$f(x)=\sin(2x+\pi)$ je goniometrická funkce sinx posunutá o $\dfrac{\pi}{2}$ se základní periodou π.

Je definována pro všechna reálná čísla. Jde tedy o funkci spojitou v **R.**

12. Derivace funkce

12.1.1 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = 6.\sin x$

$$f'(x) = 6.\cos x$$

12.1.2 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = e^x - 2.\ln x$

$$f'(x) = e^x - \frac{2}{x}$$

12.1.3 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 7x - 6$

$$f'(x) = (5x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 7x - 6)' = (5x^4)' - (4x^3)' + (8x^2)' - (7x)' - (6)' =$$
$$= 5.4.x^3 - 4.3.x^2 + 8.2.x - 7 - 0 = 20x^3 - 12x^2 + 16x - 7$$

12.1.4 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x}.(x^3 - \sqrt{x} + 1)$

$$f'(x) = (\sqrt{x}.(x^3 - \sqrt{x} + 1))' = (x^{\frac{1}{2}}.x^3 - x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})' = (x^{\frac{7}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}})' =$$
$$= \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} - 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

12.1.5 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = 10^x - 5\log_2 x$

$$f'(x) = (10^x - 5\log_2 x)' = (10^x)' - 5.(\log_2 x)' = 10^x.\ln 10 - 5.\frac{1}{x}.\frac{1}{\ln 2}$$

12.2.1 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = (x^2 - 3x + 3).(x^2 + 2x - 1)$

$$f'(x) = \left((x^2 - 3x + 3).(x^2 + 2x - 1)\right)' = (x^2 - 3x + 3)'.(x^2 + 2x - 1) + (x^2 - 3x + 3).(x^2 + 2x - 1)' =$$
$$= (2x - 3).(x^2 + 2x - 1) + (x^2 - 3x + 3).(2x + 2) = 2x^3 - 3x^2 + 4x^2 - 6x - 2x + 3 + 2x^3 - 6x^2 +$$
$$+ 6x + 2x^2 - 6x + 6 = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$$

12.2.2 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = \sin x.\cos x$

$$f'(x) = (\sin x.\cos x)' = (\sin x)'.\cos x + \sin x.(\cos x)' = \cos x.\cos x + \sin x.(-\sin x) =$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

12.2.3 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = x.\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$

$$f'(x) = (x.\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)' = (x.\sqrt{1-x^2})' + (\arcsin x)' = (x)'.\sqrt{1-x^2} +$$
$$+ x.(\sqrt{1-x^2})' + (\arcsin x)' = \sqrt{1-x^2} + x.\frac{-2x}{2.\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x^2) - x^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{2.(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2}$$

12.3.1 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{(2x)'.(1-x^2) - (2x).(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} =$$
$$= \frac{2.(1-x^2) - 2x.(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

12.3.2. Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{\sin x}\right)' = \frac{(e^x)'.\sin x - e^x.(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{e^x.\sin x - e^x \cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{e^x.(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$$

12.3.3 Vypočtěte 1.derivaci funkce $f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

$$f'(x) = \left(\frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)' = \frac{(1-\ln x)'.(1+\ln x) - (1-\ln x).(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2} = \frac{(-\frac{1}{x}).(1+\ln x) - (1-\ln x).(\frac{1}{x})}{(1+\ln x)^2} =$$
$$= \frac{(-\frac{1}{x}).((1+\ln x) + (1-\ln x))}{(1+\ln x)^2} = \frac{-\frac{2}{x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{-2}{x.(1+\ln x)^2}$$

12.4.1 Vypočtěte 1.derivaci složené funkce $f(x) = \sin\frac{x}{2}$

$$f'(x) = (\sin\frac{x}{2})' = \cos\frac{x}{2}.(\frac{x}{2})' = \cos\frac{x}{2}.(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$$

12.4.2 Vypočtěte 1.derivaci složené funkce $f(x) = \arccos\frac{2x^2-5}{3}$

$$f'(x) = \left(\arccos\frac{2x^2-5}{3}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x^2-5}{3}\right)^2}}.\left(\frac{2x^2-5}{3}\right)' =$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{9-(2x^2-5)^2}}.\frac{4}{3}x = \frac{-4x}{\sqrt{9-(2x^2-5)^2}}$$

12.4.3 Vypočtěte 1.derivaci složené funkce $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$

$$f'(x) = (e^{\sqrt{1+x}})' = (e^{\sqrt{1+x}}).(\sqrt{1+x})' = \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{2\sqrt{1+x}}$$

12.4.4 Vypočtěte 1.derivaci složené funkce $f(x) = \arctan(5x-3)$

$$f'(x) = (\arctan(5x-3))' = \frac{(5x-3)'}{1+(5x-3)^2} = \frac{5}{1+25x^2-30x+9} = \frac{5}{25x^2-30x+10}$$

12.4.5 Vypočtěte 1.derivaci složené funkce $f(x) = x^{2x}$

$$f'(x) = (x^{2x})' = (e^{2x.\ln x})' = (e^{2x.\ln x}).((2x)'.\ln x + 2x(\ln x)') =$$

$$= (x^{2x}).(2\ln x + 2x.\frac{1}{x}) = (x^{2x}).(2\ln x + 2) = 2.(x^{2x}).(\ln x + 1)$$

12.5.1 Vypočtěte 2.derivaci složené funkce $f(x) = \sin 2x$

$$f'(x) = (\sin 2x)' = 2\cos x$$

$$f''(x) = (2\cos x)' = -2\sin x$$

12.5.2 Vypočtěte 2.derivaci složené funkce $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{4}$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{4}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{4}$$

$$f''(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{4}\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{4}\right)$$

12.5.3 Vypočtěte derivaci složené funkce $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{2.(1-x^2) - 2x.(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{2x^2+2}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{2(x^2+1)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

12.5.4 Vypočtěte 3. derivaci složené funkce $f(x) = 5x^3$

$$f(x) = 5x^3$$
$$f'(x) = 15x^2$$
$$f''(x) = 30x$$
$$f'''(x) = 30$$

12.6.1 Vypočtěte 1.a 2. derivaci funkce zadané svými parametrickými rovnicemi $x = 2(t^2+1)\ ,\ y = 2.t^3$

$$x = 2(t^2+1)\ ,\ \dot{x} = 2t\ ,\ \ddot{x} = 2$$
$$y = 2.t^3\ ,\ \dot{y} = 6t^2\ ,\ \ddot{y} = 12t$$
$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{6t^2}{2t} = 3t$$
$$y'' = (\frac{\dot{y}}{\dot{x}})^{\cdot} = \frac{\ddot{y}.\dot{x} - \ddot{x}.\dot{y}}{\dot{x}^3} \rightarrow \quad y'' = \frac{12t.2t - 2.6t^2}{(2t)^3} = \frac{12t^2}{8t^3} = \frac{3}{2t}$$

12.6.2 Vypočtěte 1.a 2. derivaci funkce zadané svými parametrickými rovnicemi $x = \cos t\ ,\ y = \sin t$

$$x = \cos t\ ,\ \dot{x} = -\sin t\ ,\ \ddot{x} = -\cos t$$
$$y = \sin t\ ,\ \dot{y} = \cos t\ ,\ \ddot{y} = -\sin t$$
$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$$
$$y'' = (\frac{\dot{y}}{\dot{x}})^{\cdot} = \frac{\ddot{y}.\dot{x} - \ddot{x}.\dot{y}}{\dot{x}^3} \rightarrow \quad y'' = \frac{(-\sin t).(-\sin t) - (-\cos t).(\cos t)}{(-\sin t)^3} =$$
$$= \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{-\sin^3 t} = \frac{-1}{\sin^3 t}$$

13. Taylorova věta a aplikace

13.1.1 Vypočtěte diferenciál $df(x)$ funkce $f(x)=2^{(x-2)}$

$$df(x)=f'(x).dx=(2^{(x-2)})'dx=(2^{(x-2)}.\ln 2)dx$$

13.1.2 Vypočtěte diferenciál $df(x)$ funkce $f(x)=3\cos\frac{x-\pi}{2}$ v bodě $x_0=\pi$.

$$df(x_0)=f'(x_0).(x-x_0)=(3\cos\frac{x-\pi}{2})'_{(x_0=\pi)}.(x-\pi)=$$

$$=\frac{3}{2}(-\sin(\pi-\pi)).(x-\pi)=0.(x-\pi)=0$$

13.1.3 Vypočtěte druhý diferenciál $d^2f(x)$ funkce $f(x)=\tan x$.

$$d^2f(x)=f''(x).(dx)^2=(\tan x)''.(dx)^2=(\frac{1}{\sin^2 x})'.(dx)^2=-2\frac{\cos x}{\sin^3 x}(dx)^2$$

13.2.1 Vypočtěte Taylorův rozvoj 3.stupně funkce $f(x)=\frac{1}{1-x}$ v bodě $x_0=3$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1} \qquad f(3)=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=(-1).(1-x)^{-2}.(-1)=\frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(3)=\frac{1}{(1-3)^2}=\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=(-2).(1-x)^{-3}.(-1)=\frac{2}{(1-x)^3} \qquad f''(3)=\frac{2}{(1-3)^3}=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}$$

$$f'''(x)=2.(-3).(1-x)^{-4}.(-1)=\frac{6}{(1-x)^4} \qquad f'''(3)=\frac{6}{(1-3)^4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{1-x}=f(3)+\frac{f'(3)}{1!}(x-3)+\frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2+\frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(x-3)+\frac{-\frac{1}{4}}{2}(x-3)^2+\frac{\frac{3}{8}}{6}(x-3)^3=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(x-3)-\frac{1}{8}(x-3)^2+\frac{1}{16}(x-3)^3$$

13.2.2 Vypočtěte Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = \cos x$

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\
f''''(x) = \cos x & f''''(0) = 1
\end{array}
$$

$$\cos x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + \ldots =$$

$$= 1 + 0 - \frac{1}{2}x^2 + 0 + \frac{1}{24}x^4 + 0 - \ldots$$

13.3.1 Zjistěte, kde funkce $f(x) = x^3 - 3x - 1$ je rostoucí, klesající, a kde nabývá svého lokálního minima a maxima.

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \qquad \to 3x^2 - 3 = 0$$

$$3.(x^2 - 1) = 0 \qquad \to 3.(x-1).(x+1) = 0$$

stacionární body $x_1 = 1, \quad x_2 = -1$

$$f(-2) = 12 - 3 = 9 \;\; > 0 \qquad f(0) = -3 \;\; < 0 \qquad f(2) = 12 - 3 = 9 \;\; > 0$$

V intervalu (-∞,-1) funkce roste, v intervalu (-1,1) funkce klesá, v intervalu (1,∞) funkce roste.

Bod x=-1 je bodem lokálního maxima, bod x=1 bodem lokálního minima.

13.3.2 Zjistěte, kde funkce $f(x) = e^{2x}$ je rostoucí, klesající, a kde nabývá svého lokálního minima a maxima.

$$f(x) = e^{2x} \qquad f'(x) = 2e^{2x} > 0$$

$f'(x) > 0 \quad \to$ 1.derivace je stále kladná

funkce je rostoucí na celém definičním oboru D(f)=**R**, nemá žádné extrémy

13.3.3 Zjistěte, kde funkce $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ je rostoucí, klesající, a kde nabývá svého lokálního minima a maxima.

$f(x) = \dfrac{2}{x+3} \qquad f'(x) = \dfrac{-2}{(x+3)^2} < 0$ s vyjímkou bodu x=-3, kde f(x) není definovaná

Funkce je tedy po částech rostoucí na intervalech (-∞,-3) , (-3,∞)

13.4.1 Zjistěte inflexní body, konvexnost a konkávnost funkce $f(x)=(x-1)^3$.

$f(x)=(x-1)^3$, $f'(x)=3(x-1)^2$, $f''(x)=6(x-1)$

$f''(x)=0 \rightarrow 6(x-1)=0 \rightarrow x=1$ je inflexní bod

$f''(0)=-6<0$, $f''(2)=6>0$, tedy na intervalu (-∞,1) je funkce konkávní (pod tečnou)

na intervalu (1,∞) je funkce konvexní (nad tečnou)

.

13.4.2 Zjistěte inflexní body, konvexnost a konkávnost funkce $f(x)=\ln(x-2)$.

$$f(x)=\ln(x-2) \quad f'(x)=\frac{1}{x-2} \quad f''(x)=\frac{-1}{(x-2)^2} \quad <0$$

Na D(f)=(2,∞) je funkce konkávní, inflexi nemá.

13.5.1 Nalezněte tečnu a normálu k funkci $f(x)=\dfrac{8}{4+x^2}$ v bodě T(2,?).

$$f(x)=\frac{8}{4+x^2} \quad , \; f'(x)=\frac{-16x}{(4+x^2)^2}$$

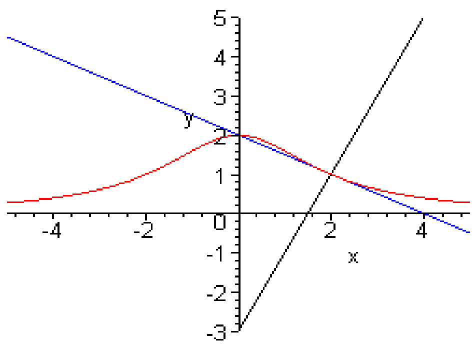
$$f(2)=\frac{8}{4+4}=1 \; , \; f'(2)=\frac{-32}{(4+4)^2}=\frac{-32}{64}=\frac{-1}{2}$$

Rovnice tečny ...... $y-f(x_0)=f'(x_0).(x-x_0)$

Rovnice normály ...... $y-f(x_0)=\dfrac{-1}{f'(x_0)}.(x-x_0)$

$t: \; y-1=\frac{1}{2}(x-2) \rightarrow x+2y-4=0$

$n: \; y-1=-2.(x-2) \rightarrow 2x-y-3=0$



13.5.3 Nalezněte tečnu a normálu k funkci zadané parametrickými rovnicemi

$$x=\frac{3at}{1+t^3}\quad,\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}\qquad \text{v bodě t=2.}$$

$$x=\frac{3at}{1+t^3}\quad,\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}\qquad x(2)=\frac{6a}{9}=\frac{2a}{3}\qquad y(2)=\frac{12a}{9}=\frac{4a}{3}$$

$$\dot{x}=\frac{3a.(1+t^3)-3at.3t^2}{(1+t^3)^2}\quad,\quad \dot{y}=\frac{6at.(1+t^3)-3at^2.3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\dfrac{6at.(1+t^3)-3at^2.3t^2}{(1+t^3)^2}}{\dfrac{3a.(1+t^3)-3at.3t^2}{(1+t^3)^2}}=\frac{6at-3at^4}{3a-6at^3}=\frac{3at.(1-t^3)}{3a.(1-2t^3)}=\frac{t.(1-t^3)}{(1-2t^3)}$$

$$y'(2)=\frac{14}{15}$$

$$t:4x-5y+4a=0\qquad\qquad n:15x+12y-26a=0$$

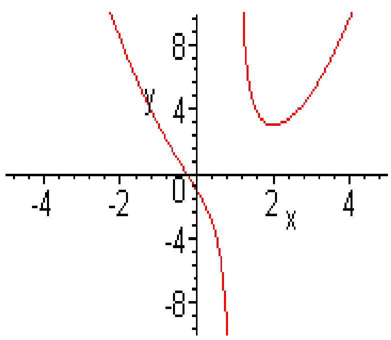
13.6.1 Pomocí L´Hospitalova pravidla vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x}=$$
$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{3}$$

13.6.2 Pomocí L´Hospitalova pravidla vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

13.7.1 Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x+1}{x-1}$



$x \neq 1$, tedy $D(f)=(-\infty,1) \cup (1,\infty)$

$f'(x) = 2\dfrac{(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}$, $\quad x \neq 1$, *kořeny* $x = 2$, lokální minimum

na intervalech $(-\infty, 1 + \sqrt[3]{-2}), (1 + \sqrt[3]{-2}, 1), (1, 2)$ je klesající

na intervalu $(2, \infty)$ je rostoucí

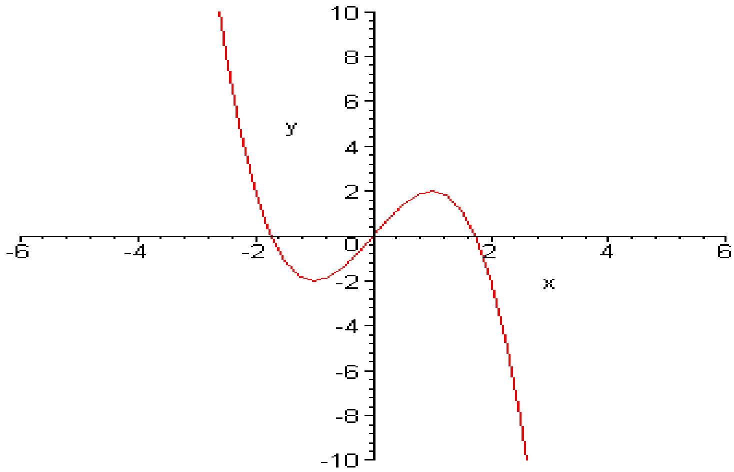
$f''(x) = 2\dfrac{(x-1)^3 + 2}{(x-1)^3}$, $\quad x \neq 1$. *kořeny* $x = 1 - \sqrt[3]{2}$, inflexní bod

konvexní na intervalech $(-\infty, 1 + \sqrt[3]{-2}), (1, 2), (2, \infty)$

konkávní na intervalu $(1 + \sqrt[3]{-2}, 1)$

Asymptota bez směrnice : x=1 , $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \infty$

13.7.2 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = -x^3 + 3x$



Funkce je lichá funkce, definovaná v **R .**

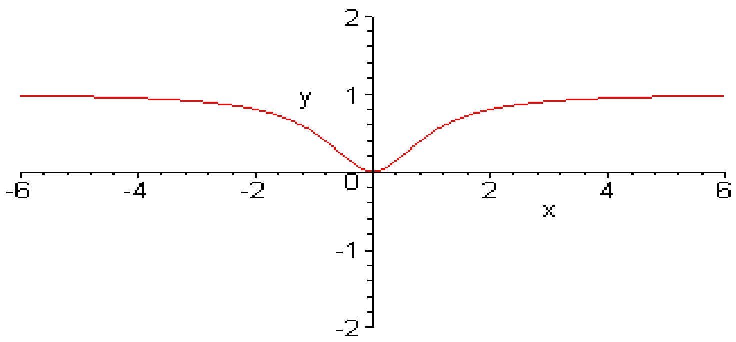
Nulové body má x=0, x= $\pm\sqrt{3}$.

Lokální minimum je y=-2 v bodě x=-1 , lokální maximum je y= 2 v bodě x= 1.

Je klesající na intervalech $(-\infty,1)$ a $(1,+\infty)$,rostoucí na intervalu $(-1,1)$.

Inflexní bod je x=0 , na $(-\infty,0)$ je konvexní, na $(0,\infty)$ je konkávní.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, 13.5.4 Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$



Všude definovaná, nezáporná, sudá funkce.

Nulové hodnoty nabývá v bodě x=0.

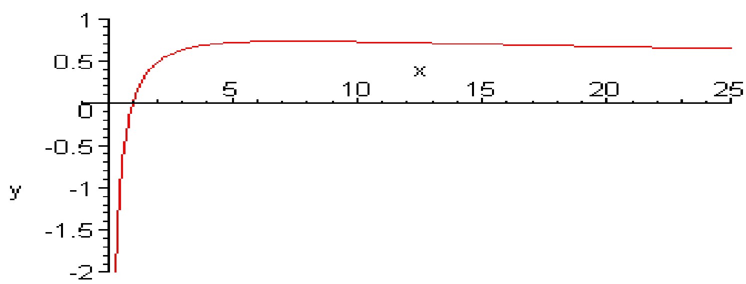
Lokální minimum v bodě x=0, na $(-\infty,0)$ je klesající , na intervalu $(0,\infty)$ rostoucí.

Inflexní body jsou $[\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}],[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}]$.

V intervalech $(-\infty,\frac{-\sqrt{3}}{3})$ a $(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ je konvexní, v intervale $(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ konkávní.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, asymptota se směrnicí je tedy y=1.

13.5.5 Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$



$D(f)=(0,+\infty)$, nulový bod x=1 .

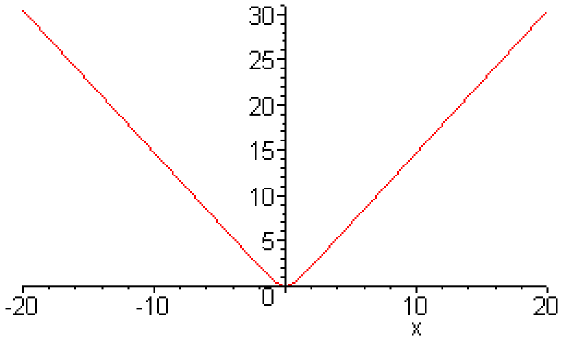
Lokální maximum $y=\frac{2}{e}$ v bodě $x=e^2$, na $(0,e^2)$ je rostoucí, na $(e^2,+\infty)$ klesající .

Inflexní bod $[\,e^{\frac{8}{3}},\frac{8}{3}e^{\frac{-4}{3}}\,]$,na intervalu $(0,e^{\frac{8}{3}})$ je konvexní , na intervalu $(e^{\frac{8}{3}},+\infty)$.

Asymptoty : bez směrnice - $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=-\infty$, tedy x=0 ,

se směrnicí - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, tedy y=0 .

13.7.4 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x \arctan x$



Funkce je všude definovaná , nezáporná a sudá.

Nulové hodnoty nabývá v bodě x=0 , minima nabývá v bodě x=0 ,

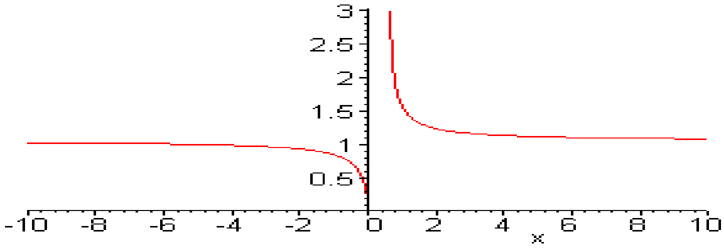
na intervalu (-∞,0) je klesající , na intervalu (0,∞) je rostoucí ,

funkce nemá inflexní body a je stále konvexní.

Asymptoty bez směrnice nejsou, asymptoty se směrnicí jsou y=$-\frac{\pi}{2}x - 1$ pro x $\rightarrow$ -∞,

y=$\frac{\pi}{2}x - 1$ pro x $\rightarrow \infty$.

13.5.6 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x \arccos \dfrac{1 - \cos x}{1 - 2x}$



D(f)=(-∞,0>∪<$\frac{2}{3}$,∞) , nulový bod x=0 .

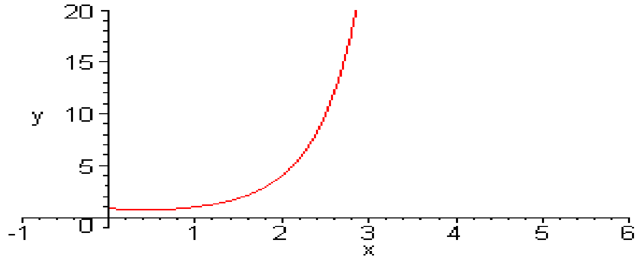
Platí $y'_-(0) = y'_+(\frac{2}{3}) = -\infty$. Lokální minimum y=0 v bodě x=0,

lokální maximum y=π v bodě x=$\frac{2}{3}$, na intervalech (-∞,0) a ($\frac{2}{3}$,∞) je klesající.

Na intervalu (-∞,0) je funkce konkávní a na intervalu ($\frac{2}{3}$,∞) je konvexní.

Asymptota se směrnicí y=$\frac{\pi}{3}$ pro x $\rightarrow$ +∞ i pro x $\rightarrow$ -∞ .

13.5.7 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^X$



D(f)=(0,∞) , funkce je kladná , nulový bod nemá.

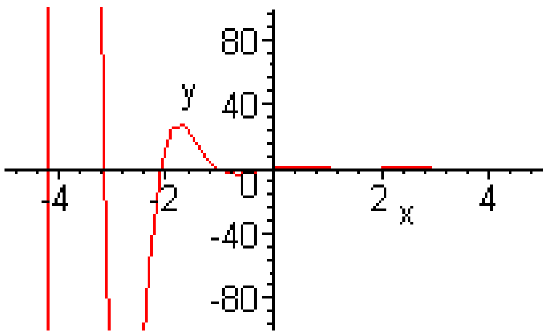
Lokální minimum $y=(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$ v bodě $x=\frac{1}{e}$.

Na intervalu $(0,\frac{1}{e})$ je klesající , na intervalu $(\frac{1}{e},\infty)$ je rostoucí.

Na celém definičním intervalu je konvexní.

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$

13.5.8 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^{-2x}\sin 3x$



D(f)=(-∞,∞), spojitá, ani sudá ani lichá.

Nulové body jsou $x=k\frac{\pi}{3}$, kde k je celé číslo.

V bodech, kde $\tan(3\ x) = \frac{3}{2}$, má lokální extrémy, inflexní body v x, pro něž $\tan(3\ x) = \frac{-12}{5}$.

14. Primitivní funkce

14.1.1 Užitím základních vzorců integrujte:

$$\int (x^5 + \sqrt{x} - x^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1)dx = \int x^5 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{3}{4}} dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \int dx =$$

$$\frac{x^6}{6} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + x + C = \frac{x^6}{6} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{4}{7}x\sqrt[7]{x^3} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + x + C$$

14.1.2 Užitím základních vzorců integrujte:

$$\int (3\sin x - \frac{\cos x}{5})dx = 3\int \sin x dx - \frac{1}{5}\int \cos x dx = -3\cos x - \frac{1}{5}\sin x + C$$

14.1.3 Užitím základních vzorců integrujte:

$$\int \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$$

14.1.4 Užitím základních vzorců integrujte:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$$

14.2.1 Integrujte pomocí úpravy integrandu:

$$\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx = |vydělíme| = \int (x^2 - 1 + \frac{1}{1 + x^2})dx = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$$

14.2.2 Integrujte pomocí úpravy integrandu:

$$\int \frac{5}{1 + \cos 2x} dx = |gon.vzorce| = \int \frac{5}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{5}{2}\tan x + C$$

14.2.3 Integrujte pomocí úpravy integrandu:

$$\int \cos^2 x dx = |gon.vzorce| = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

14.3.1 Pomocí substituce integrujte:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \left| \begin{array}{r} sub. x - 2 = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(x-2)^2} + C$$

14.3.2 Pomocí substituce integrujte:

$$\int xe^{x^2}dx = \left| \begin{array}{r} sub.\ x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

14.3.3. Pomocí substituce integrujte:

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \left| \begin{array}{l} sub.\quad x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

14.3.4. Pomocí substituce integrujte:

$$\int \sin(5x+3)dx = \left| \begin{array}{r} sub.\quad 5x+3 = t \\ 5dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int \sin t dt = -\frac{1}{5}\cos t + C = -\frac{1}{5}\cos(5x+3) + C$$

14.3.5. Pomocí substituce integrujte:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\sin x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} sub.\quad \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2-1}{t+2}dt = \int \frac{t^2-4+3}{t+2}dt = \int \frac{(t-2)\cancel{(t+2)}}{\cancel{(t+2)}}dt + 3\int \frac{dt}{t+2} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + C$$

14.4.1 Pomocí „per partes“ integrujte:

$$\int xe^{2x}dx = \left| \begin{array}{ll} p.p.\ u' = e^{2x} & u = \frac{1}{2}e^{2x} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

14.4.2 Pomocí „per partes“ integrujte:

$$\int \ln x dx = \int 1.\ln x dx = \left| \begin{array}{ll} p.p.\ v' = 1 & v = x \\ u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

14.4.3 Pomocí opakované „per partes" integrujte:

$$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{matrix} p.p. \ v = x^2 & v' = 2x \\ u' = \sin x & u = -\cos x \end{matrix} \right| = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} p.p. \ v = x & v' = 1 \\ u' = \cos x & u = \sin x \end{matrix} \right| = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

14.4.4 Pomocí „per partes" a převedením na rovnici integrujte:

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{matrix} p.p. \ u' = e^x & u = e^x \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{matrix} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} p.p. \ u' = e^x & u = e^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{matrix} \right| = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \sin x)$$

14.5.1 Integrujte racionální funkci:

$$\int \frac{5}{(3x+2)^3} dx = \left| \begin{matrix} sub. \ 3x+2 = t \\ 3dx = dt \\ 5dx = \frac{5}{3} dt \end{matrix} \right| = \frac{5}{3}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{5}{3}\int t^{-3} dt = \frac{5}{3}\frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{5}{6}\frac{1}{t^2} + C =$$

$$= -\frac{5}{6}\frac{1}{(3x+2)^2} + C$$

14.5.2 Integrujte racionální funkci:

$$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{5}}{x^2+2x+10} dx = \frac{5}{2}\int \frac{(2x+2)-2+\frac{4}{5}}{x^2+2x+10} dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10} dx +$$

$$+ \frac{5}{2}\left(-\frac{6}{5}\right)\int \frac{1}{x^2+2x+10} dx = \frac{5}{2} I_1 - 3I_2 = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+x+10\right| - \arctan\frac{x+1}{3} + C$$

Integrál I_1 řešíme podle vzorce $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\left|f(x)\right| + c$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{x^2+x+10} dx = \ln\left|x^2+x+10\right| + C_1$$

Integrál I_2 řešíme úpravou a substitucí

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+2x+1)+9}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx = \left| \begin{aligned} sub.\ \ x+1 &= t \\ dx &= dt \end{aligned} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{(9+t^2)}\,dt = \frac{1}{3}\arctan(\frac{t}{3}) + C_2 = \frac{1}{3}\arctan\frac{(x+1)}{3} + C_2$$

14.5.3 Pomocí rozkladu na parciální zlomky integrujte racionální funkci:

$$I = \int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x} = \int \frac{dx}{6x(x^2-\frac{7}{9}x-\frac{1}{2})} = \int \frac{dx}{6x(x-\frac{3}{2})(x+\frac{1}{3})} = \int \frac{dx}{x(2x-3)(3x+1)}$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{x(2x-3)(3x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{3x+1} = \left\{ A = -\frac{1}{3}, B = \frac{4}{33}, C = \frac{9}{11} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{x} + \frac{4}{33}\frac{1}{2x-3} + \frac{9}{11}\frac{1}{3x+1}$$

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{4}{33}\int \frac{dx}{2x-3} + \frac{9}{11}\int \frac{dx}{3x+1} = -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{33}\ln|2x-3| + \frac{3}{11}\ln|3x+1| + C$$

14.5.4 Pomocí rozkladu na parciální zlomky integrujte racionální funkci:

$$I = \int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}\,dx$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \{A = 2, B = -1, C = -6\} =$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-6}{(x+1)^2}$$

$$I = 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - 6\int \frac{dx}{(x+1)^2} = 2\ln|x| - \ln|x+1| - 6\left(\frac{-1}{x+1}\right) + C =$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C$$

14.5.5 Pomocí rozkladu na parciální zlomky integrujte racionální funkci:

$$I=\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}=\left\{A=\frac{1}{3},\ M=-\frac{1}{3},\ N=\frac{2}{3}\right\}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$$

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

14.6.1 Integrujte složenou racionální funkci z goniometrických funkcí:

$$\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\sin x\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x\,dx=\left|\begin{matrix} sub.\ \cos x=t \\ \sin xdx=-dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{t^2-1}{t+2}dt=\int\frac{t^2-4+3}{t+2}dt=\int\frac{(t-2)\cancel{(t+2)}}{\cancel{(t+2)}}dt+3\int\frac{dx}{t+2}=\int(t-2)dt+3\int\frac{dx}{t+2}=$$

$$=\frac{t^2}{2}-2t+3\ln|t+2|+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln|\cos x+2|+C$$

14.6.2 Integrujte složenou racionální funkci z goniometrických funkcí:

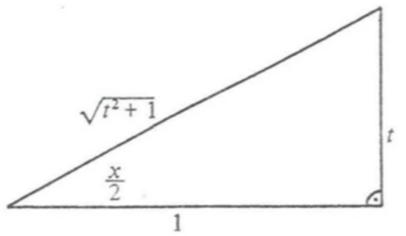
$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} sub.\ \ \cos x=t \\ \sin xdx=-dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{(2+t)(t^2-1)}=\{\text{....pomocí rozkladu na parciální zlomky..........}\}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{2+t}+\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}=\frac{1}{3}\ln|2+t|+\frac{1}{6}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(\cos x+2)^2(\cos x-1)}{(\cos x+1)^3}\right|+C$$

14.6.3 Univerzální metodou integrujte složenou racionální funkci z goniometrických funkcí:



$$sub.\quad \tan\frac{x}{2}=t,\quad x=2\arctan t,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}},\quad \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\sin x=\sin(2\frac{x}{2})=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x=\cos(2\frac{x}{2})=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{t^2+1}-\frac{t^2}{t^2+1}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int\frac{1}{3\sin x-4\cos x}dx=\int\frac{1}{3\frac{2t}{1+t^2}-4\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=2\int\frac{1}{6t-4+4t^2}dt=\int\frac{1}{3t-2+2t^2}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{(2t-1)(t+2)}=\{\text{...pomocí rozkladu na parciální zlomky.........}\}=$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{1}{2t-1}dt-\frac{1}{5}\int\frac{1}{t+2}dt=\frac{2}{5}\frac{1}{2}\ln|2t-1|-\frac{1}{5}\ln|t+2|+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\tan\frac{x}{2}+2}\right|+C$$

14.7.1 Integrujte iracionální funkci:

$$\int\frac{\sqrt{2x+1}}{x}dx=\left|\begin{matrix} sub.\ 2x+1=t & x=\frac{t^2-1}{2} \\ 2dx=dt & dx=t\,dt\end{matrix}\right|=\int\frac{t}{\frac{t^2-1}{2}}t\,dt=2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=$$

$$=2\int dt+2\int\frac{1}{(t-1)(t+1)}dt=2\int dt+\{\text{...rozklad na parciální zlomky...}\}=$$

$$=2\int dt+\int\frac{dt}{t+1}-\int\frac{dt}{t-1}=2t+\ln|t+1|-\ln|t-1|+C=2\sqrt{2x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}\right|+C$$

14.7.2 Integrujte iracionální funkci:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx = \left| \begin{matrix} sub.\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\sqrt{t^4}}{1+\sqrt[4]{t^{12}}} 4t^3 dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt =$$

$$= 4\int t^2 dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt = 4\int t^2 dt - \frac{4}{3}\int \frac{3t^2}{t^3+1}dt = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3}\ln\left|1+\sqrt[4]{x^3}\right| + C$$

14.7.3 Integrujte iracionální funkci:

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{5-(x^2+4x+4)+4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(x+2)^2}}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} sub.\ x+2 = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{9-t^2}}dt = \arcsin\frac{t}{3} + C =$$

$$== \arcsin\frac{x+2}{3} + C$$

14.8.1 Integrujte pomocí goniometrických funkcí iracionální funkci:

$$\int \sqrt{9-x^2}dx = \left| \begin{matrix} sub.\ \ x = 3\cos t \\ dx = -3\sin t dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{9-9\cos^2 t}(-3)\sin t dt = -9\int \sqrt{\sin^2 t}\sin t dt =$$

$$= -9\int \sin^2 t dt = -9\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -9(\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}) + C = -\frac{9}{2}\arccos\frac{x}{3} + \frac{9}{4}\sin(2\arccos\frac{x}{3}) + C =$$

$$= -\frac{9}{2}\arccos\frac{x}{3} + \frac{9}{4}2\sin\arccos\frac{x}{3}\arccos\cos\frac{x}{3} + C = -\frac{9}{2}\arccos\frac{x}{3} + \frac{3x}{2}\sqrt{1-(\cos\arccos\frac{x}{3})^2} + C =$$

$$= -\frac{9}{2}\arccos\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$$

14.8.2 Integrujte pomocí goniometrických funkcí iracionální funkci:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+4x+4)-4}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} sub.\ x+2 = \dfrac{2}{\cos t} \\ dx = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt \\ t = arc\cos\dfrac{2}{x+2} \end{array} \right| = \int \frac{4}{\sqrt{\dfrac{4}{\cos^2 t}-4}} \frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{\cos t}{2\sqrt{1-\cos^2 t}} \frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{1}{\cos t}dt =$$

$$= \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt = \left| \begin{array}{l} sub.\ \ \sin t = u \\ \cos t dt = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{1-u^2} = \{...rozklad\ na\ parc.zlomky...\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} = \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|1-u| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\arccos\dfrac{2}{x+2}}{1-\sin\arccos\dfrac{2}{x+2}} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-(\dfrac{2}{x+2})^2}}{1-\sqrt{1-(\dfrac{2}{x+2})^2}} + C = \{...úpravou...\} =$$

$$= \ln(x+2+\sqrt{x^2+4x}) + C$$

15. Riemannův určitý integrál

15.1.1 Metodou „per partes“ vypočtěte hodnotu určitého integrálu:

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx = \left| \begin{array}{ll} p.p.\ u'=1 & u=x \\ v=\ln(x+1) & v'=\dfrac{1}{x+1} \end{array} \right| = \left[x\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx =$$

$$= \left[1\ln 2 - 0\ln 1\right] - \left\{ \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} \right\} = \ln 2 - \left[x\right]_0^1 + \left[\ln(x+1)\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

15.1.2 Metodou substituční vypočtěte hodnotu určitého integrálu:

(*pomocí transformací mezí*)

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{1+\ln x}{x}dx = \left| \begin{array}{lll} sub. & \ln x = t & \\ & \dfrac{1}{x}dx = dt & \\ \boxed{x} & e^{-1} & e^3 \\ \hline \boxed{t} & -1 & 3 \end{array} \right| = \int_{-1}^{3}(1+t)dt = \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{3} = 3+\frac{9}{2}+1-\frac{1}{2} = 8$$

15.1.3 Metodou substituční vypočtěte hodnotu určitého integrálu:

(*pomocí dosazení do primitivní funkce*)

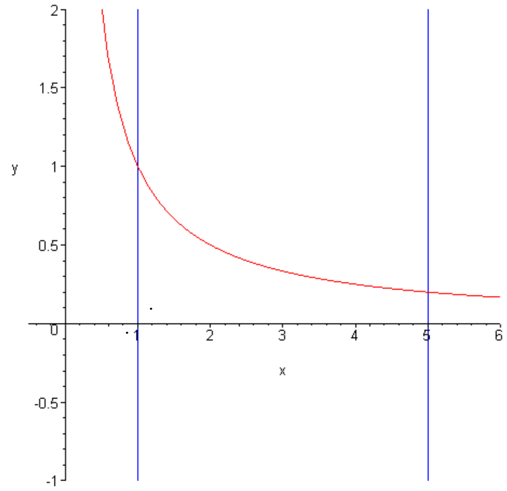
$$\int_4^8 \frac{x-1}{x^2-2x-3}dx = \frac{1}{2}\int_4^8 \frac{2x-2}{x^2-2x-3}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2-2x-3\right|\right]_4^8 = \frac{1}{2}(\ln 45 - \ln 5) = \ln 3$$

Výpočet primitivní funkce:

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x-3}dx = \left| \begin{array}{ll} sub. & x^2-2x-3=t \\ & (2x-2)dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^2-2x-3\right| + C$$

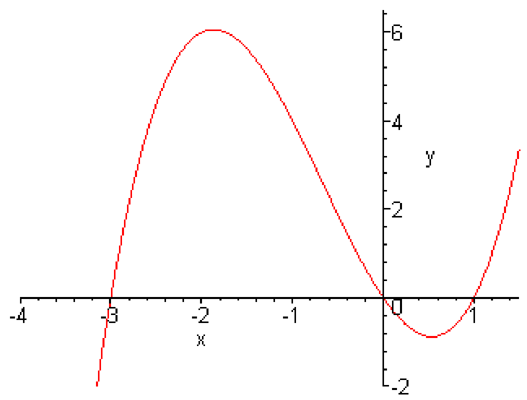
16. Aplikace Riemannova integrálu

16.1.1 Vypočtěte obsah obrazce omezeného křivkou $y=\dfrac{1}{x}$, osou x a přímkami $x=1$, $x=5$



$$P=\int_a^b f(x)dx=\int_1^5 \frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_1^5=\ln 5-\ln 1=\ln 5$$

16.1.2 Vypočtěte obsah obrazce omezeného křivkou $y=x^3+2x^2-3x$ a osou x



Průsečíky s osou x jsou :

$$x^3+2x^2-3x=x(x+3)(x-1)=0$$

$x=-3$, $x=0$, $x=1$

v intervalu $\langle -3,0\rangle$ je funkce nezáporná

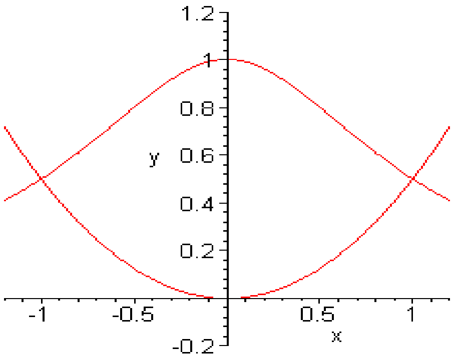
v intervalu $\langle 0,1\rangle$ je funkce záporná

$$P = \int_{-3}^{0} (x^3 + 2x^2 - 3x)dx + \left| \int_{0}^{1} (x^3 + 2x^2 - 3x)dx \right| = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^{0} +$$

$$+ \left| \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{0}^{1} \right| = \left[0 - \frac{81}{4} + 18 + \frac{27}{2} \right] + \left| \left[\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} - 0 \right] \right| = \frac{45}{4} + \left| -\frac{7}{12} \right| =$$

$$= \frac{135 + 7}{12} = \frac{142}{12} = \frac{71}{6}$$

16.1.3 Vypočtěte obsah obrazce omezeného křivkami $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{1}{2}x^2$



Vypočteme souřadnice průsečíků grafů:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$sub. z = x^2 \ \Rightarrow z^2 + z - 2 = 0$$

$$(z+2)(z-1) = 0$$

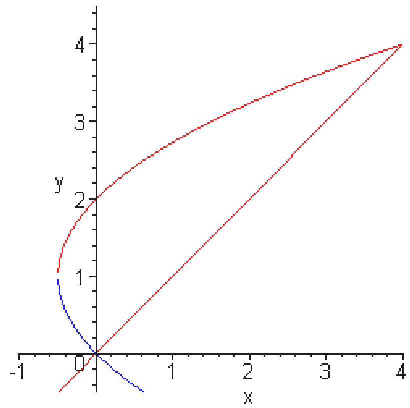
$$z_1 = -2 \ \Rightarrow x_{1,2} \notin \mathbb{R} \ , \ z_2 = 1 \ \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{1}$$

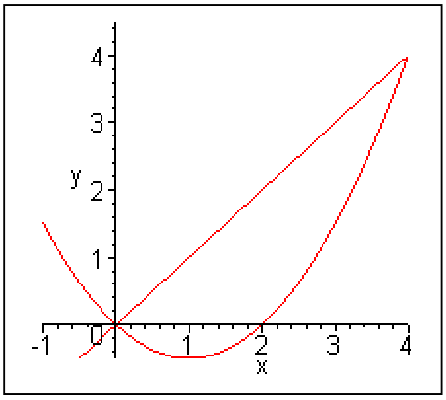
Integrujeme v intervalu $\langle -1,1 \rangle$, kde $\dfrac{1}{1+x^2} \geq \dfrac{1}{2}x^2$. Proto

$$P = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \left[\arctan x - \frac{1}{6}x^3 \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \arctan 1 - \frac{1}{6} - \arctan(-1) - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

16.1.4 Vypočtěte obsah obrazce omezeného křivkami $(y-1)^2 = 2x+1$, $x-y=0$





Záměnou závislosti proměnných při průsečících y=0 a y=4 obdržíme:

$$P=\int_0^4 (y-\frac{1}{2}y^2+y)dy=\int_0^4 (2y-\frac{1}{2}y^2)dy=\left[y^2-\frac{1}{6}y^3\right]_0^4=16-\frac{64}{6}=\frac{16}{3}$$

16.1.5 Vypočtěte obsah P kruhu o poloměru r

Kruh je obrazec symetrický dle osy x , proto vezmeme dvakrát obsah horní poloviny

$$x^2+y^2=r^2 \quad \Rightarrow y_1=+\sqrt{r^2-x^2} \ , \ y_2=-\sqrt{r^2-x^2}$$

$$P=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{ccc} sub. & x=r\cos t & \\ & dx=-r\sin t dt & \\ \boxed{x} & -r & r \\ \boxed{t} & \pi & 0 \end{array}\right|=2\int_{\pi}^{0}\sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}\ (-r\sin t)dt=2r^2\int_0^{\pi}\sin^2 t\ dt=$$

$$=2r^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=2r^2\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi}=2r^2\frac{\pi}{2}=\pi r^2$$

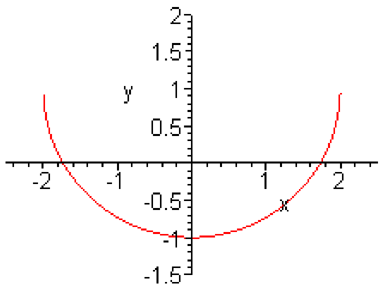
16.1.6 Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami, které jsou dány parametrickými rovnicemi

$x=2t-t^2 \quad y=2t^2-t^3$

$$P=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\dot{\varphi}(t)dt=\left|\begin{array}{ll} x=\varphi(t)=2t-t^2 & dx=\dot{\varphi}(t)dt=(2-2t)dt \\ y=\psi(t)=2t^2-t^3 & t\in\langle 0,2\rangle \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^2 (2t^2-t^3)(2-2t)dt=2\int_0^2 (t^4-3t^3+2t^2)dt=2\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{3}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3\right]_0^2=\frac{112}{15}$$

16.2.1 Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky, který má křivka o rovnici $x^2+(y-1)^2=4$ pod osou x



rovnice dolní půlkružnice je tvaru $y=1-\sqrt{4-x^2}$ $\quad y'^2=\dfrac{x^2}{4-x^2}$

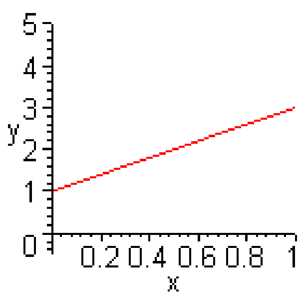
průsečíky s osou x jsou $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=+\sqrt{3}$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}\,dx=2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{4-x^2}}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{lll} sub. & x=2\cos t & \\ & dx=-2\sin t\,dt & \\ \boxed{x} & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \boxed{t} & \frac{5\pi}{6} & \frac{\pi}{6}\end{array}\right|=2\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{-2\sin t}{\sqrt{4-4\cos^2 t}}\right)dt=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{\sin t}{\sin t}\right)dt=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}dt=2\left[t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=$$

$$=2\left[\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{4}{3}\pi$$

16.2.2 Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky, který má křivka o parametrických rovnicích $x=t \quad y=1+2t$ pro $t\in\langle 0,1\rangle$



$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)}\,dt=\left|\begin{array}{lll} x=\varphi(t)=t & \dot\varphi(t)=1 & \\ y=\psi(t)=1+2t & \dot\psi(t)=2 & t\in\langle 0,1\rangle\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+4}\,dt=\sqrt{5}\int_0^1 dt=\sqrt{5}\left[x\right]_0^1=\sqrt{5}(1-0)=\sqrt{5}$$

16.3.1 Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce P kolem osy x.
Obrazec P je omezen křivkami $y^2 = 2px$, $x = 3$.

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^3 2pxdx = 2\pi p\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \pi p(9-0) = 9\pi p$$

16.3.2 Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce P kolem osy x.
Obrazec P je omezen křivkami $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$.

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi\int_1^4 \frac{1}{x^2}dx = 16\pi\left[\frac{-1}{x}\right]_1^4 == -16\pi(\frac{1}{4}-1) = 12\pi$$

16.4.1 Vypočtěte obsah rotační plochy (plášť rotačního tělesa) vzniklého rotací rovinného obrazce P omezeného přímkami $x = 1$, $x = 2$, osou $y = 0$ a grafem funkce $y = \sqrt{9-x^2}$

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f(x))^2}\,dx = \qquad \left| \begin{array}{ll} y = f(x) = \sqrt{9-x^2} & \\ y' = f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}} & x \in \langle 1,2\rangle \end{array} \right|$$

$$= 2\pi\int_1^2 \sqrt{9-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}dx =$$

$$= 2\pi\int_1^2 \frac{3\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{9-x^2}}dx = 6\pi\int_1^2 dx = 6\pi\left[x\right]_1^2 = 6\pi(2-1) = 6\pi$$